Ressenya

ESTAT ACTUAL DEL PROBLEMA ANOMENAT D'«ESTABILITAT»

L'exposició que segueix comprèn quatre parts principals segons la pauta que a seguit s'indica.

I. *Preliminar*

1. Diversa introducció del concepte d'estabilitat en Ciencies aplicades i esquematització del mateix en la Matemàtica pura.
2. Criteri d'estabilitat. Sa definició precisa.

II. *Reconeixement de l'estabilitat pel mínim d'una funció*

1. Teorema de Lagrange-Dirichlet, i extensió del mateix per Liapounow. Inestabilitat de l'equilibri en el cas d'un màxim en l'energía potencial. Estabilitat en sistemes astàtics.
2. Treballs de Painlevé i Cotton sobre inestabilitat en el cas d'existir funció de forces holomorfa. Cas en què U no és holomorfa.
3. Aplicació del criteri de Lagrange a l'equilibri de les figures de Plateau i a l'elàstica.

III. *Anàlisi de l'estabilitat pel mètode d'aproximacions successives*

1. Idea del mètode. Primera aproximació en el cas de moviments permanents o estacionaris. Mètode de Routh per a expressar les condicions de suficiencia a què porta la primera aproximació. Cas d'arrels iguals en l'equació característica.

2. Equacions en forma canònica. Aplicació a l'equilibri i als sistemes cíclics conservatius.

3. Moviments estacionaris de Levi-Civita. Vibracions de relació. Cas en què són estables. Anàlisi d'aquestes vibracions per a les curves de Lissajous com a curves osculatrius.

4. Moviments periòdics. Coeficients característics. Index de Korteweg. Anàlisi de l'estabilitat en el cas Levi-Civita.

5. Anàlisi dels casos en què la primera aproximació és suficient. Cas de coeficients constants i arrels de part real negativa no nul·la.

6. Casos en què en l'equació característica hi figuren una o dues arrels de part real nul·la.

7. Anàlisi de les condicions amb les quals la primera aproximació és prou, per a quan els moviments no pertorbats són periòdics. Cas de coeficients característics nuls o imaginaris purs.

8. Anàlisi de l'estabilitat pel mètode d'Hamel. Transformacions de Levi-Civita. Mètode de Cotton.

IV. *Estabilitats de Hill i Poisson*

Teorema de Poincaré. Canòniques quina solució és reductible a quadratures. Moviments de Staude. Estabilitat del sistema planetari. Mètodes de Lindstedt i Bohlin. Aplicació a la turbina de Laval.

V. *Apèndix*

I. Mètode del equilibri indiferent.

II. Bibliografìa

I. Preliminar

1. *Diversa introducció del concepte d'estabilitat en ciencies aplicades i esquematització del mateix en Matemàtica pura.*

La paraula «estabilitat» s'usa segons diferents criteris. En els tractats de Construccions o resistencia de materials, per «estabilitat» sol entendre's equilibri assegurat, com conseqüencia de mides prou amples, de modo que, apart de cumplir-se les condicions d'equilibri de l'Estàtica o Elasticitat, el material treballi a una càrrega ben per sota de lo que determina la deformació permanent o el trenc. En altres branques de la Ingenyiería mecànica, estabilitat vol dir marxa silenciosa i uniforme, o moviment acompassat i rítmic, sense vibracions que passin de cert límit en l'amplitut. En Arquitectura naval, l'estabilitat té un sentit doble: o exigeix que les oscil·lacions propies del barco un cop apartat de sa posició normal d'equilibri sían lentes, lo qual és particularment interessant en la marina de guerra (1), o s'exigeix un fort parell que'l torni a sa posició d'equilibri estable, dificultant la volcada. Desgraciadament, ambdues condicions són contraries. L'estabilitat d'un barco és la d'un còs rígit, pesat, descansant sobre un pla horitzontal per la superficie de centres de carena.

Dins l'Aeronàutica, aon les causes de ruptura de l'equilibri són tan nombroses i variades, té excepcional interès l'estudi del medi de compensar-les, procurant que els moviments que en resultin arribin prompte a amortisar-se i no passin ses amplituts de cert límit. D'aqueix interès que ha arribat fins al públic per la serie de desgracies de la locomoció aèrea, n'han surtit gran nombre d'idees i projectes, alguns d'ells ingeniosos en extrem, com per exemple el ballonet d'aire de Meûnier per a combatre la inestabilitat resultant de la perdua de gas. Dins l'Aeronàutica se distingeix entre *estabilitat inherent,* funció sols de la forma de la nau, i *estabilitat automàtica.* La primera confía el retorn a la posició estable, sols a la forma, soposta invariable, de la nau. Per això se serveix de veles o plans orientats de cert modo i posats en llocs a propòsit; al revés de l'estabilitat automàtica, la qual és menys subjecta a l'anàlisi teòric i depèn de ensaigs, probes, experiments. En totes les patents — i són quí sab les — se tracta o bé de mecanismes que mouen automàticament el timó o altres plans estabilitzadors, quan la velocitat augmenta o l'aeronau comença a capgirar-se, ja, especialment, en els globos, de mètodes químics de renovació del gas, cordes penjants i en part arrastrades, boies, etc., de tots els què no haig d'ocupar-me aquí.

Dins l'Electrotecnia, l'estabilitat no porta sols a l'equilibri o moviment, sinó també a la intensitat de corrent, a la força electromotriu, quina estabilitat se tradueix en alguns casos en estabilitat mecànica, per exemple en les dinamos i motors, en què ve lligada a la forma de les curves anomenades característiques, a l'acoblament, etc., etc., existint, no obstant, casos en què la inestabilitat no's fà avinent per moviments desordenats, sinó en alteracions de la intensitat lluminosa, per exemple en l'arc voltàic. Les variables que en aquests casos intervenen són, a voltes, variables sense inercia, amb lo que el problema és lleugerament divers del problema mecànic. Variables de semblant naturalesa són la densitat, temperatura, etc., què's presenten en els pro-

---

(1) De l'estabilitat que porta a acostar el metacentre principal al centre de gravetat, apartanne els secundaris, no'ns en ocuparem aquí.

blemes tèrmics i en els equilibris químics en els què l'estabilitat juga paper molt essencial, doncs significa permanencia, probabilitat de realització i seguritat de conservació, mentres que un estat inestable significa tot lo contrari.

Dins la Hidràulica, l'estabilitat sol referir-se a la conservació d'un tipu determinat de moviment o de forma; així, per exemple, són estables els terbolís de Karman en series alternades, darrera un sòlid en moviment de dues dimensions dintre líquid; són estables certes figures d'una massa flúida en rotació, i quines parts s'atreuen per la llei de Newton, perquè en ambdós casos una petita modificació en la configuració o velocitats significa que han de seguir-la canvis petits de forma, que's conserven tals per a tot valor del temps.

Finalment, en llenguatge corrent, inestabilitat significa perill de destrucció, quelcom material o moral que a la més petita esbransida cau, i amb moviment fatal i inevitable va dret al cataclisme.

La Matemàtica, que, amb sa abstracció i síntesi maravelloses, esquematitza les relacions quantitatives entre'ls fenòmens i ses causes, fon i formalisa els criteris d'estabilitat que d'una manera vaga li ofereixen les Ciencies aplicades, els precisa i unifica, reduint son anàlisi al de la solució d'un sistema d'equacions diferencials, o a l'examen d'una funció en casos més senzills. Mes, en son estat actual, és impotent per a afirmar, d'un modo general, l'estabilitat o inestabilitat en el procés sotsmès a son examen. L'exposició que segueix presenta l'estat actual del problema i els casos en què és possible resoldre'l.

2. *Criteri d'estabilitat. Sa definicio precisa*

Sigui un estat d'equilibri o moviment caracteritzat pels valors de n coordenadas $q_1 \dots q_n$, i n velocitats, $q'_1 \dots q'_n$. Siguin $q_1+\alpha_1, \dots q_n+\alpha_n,$ $q'_1+\alpha'_1 \dots q'_n+\alpha'_n$, els valors per a un moviment veí de l'estat anterior, al menys durant cert temps a partir de l'estat inicial. A les cantitats α se les anomena «pertorbacions».

Sigui T un instant diferent de l'inicial, L un número finit al què no excedeixin els valors de certes pertorbacions en l'instant T.

Si és possible determinar per aquestes pertorbacions valors inicials finits, no nuls, inferiors a cert límit finit L_0, i aquests valors inicials no tendeixen a zero quan T creix indefinidament, se dirà que el moviment no pertorbat és estable per a les pertorbacions considerades: L i L_0 poden ésser tan petits com se vulgui, mes no zero.

Tal és el criteri d'estabilitat més conegut i corrent. Alguns prefereixen, no obstant, substituir-li el següent: *Sigui un moviment pertorbat que, inicialment, és tan veí com se vulgui del no pertorbat, objecte d'anàlisi. Si al anar a zero les pertorbacions, té el movi-*

ment pertorbat un sol límit, que és exactament el moviment donat, aquest és estable. Aquest és l'anomenat criteri de Klein. D'ell en resulta, per exemple, que el moviment rectilini uniforme d'un punt no sotsmès a força alguna, és estable; que també ho és el moviment d'un punt lliure en superficies de curvatura negativa, moviments ambdós inestables segons el criteri abans enunciat, que és més restrictiu, però serà el què s'adoptarà en lo que segueix, mentres no's digui lo contrari.

Lord Kelvin, a qui és deguda l'afirmació d'ésser l'estabilitat un dels problemes més interessants de la Ciencia, considera en la *Natural Phylosophy* una estabilitat condicional en què les pertorbacions vénen relacionades per la circumstancia de permaneixe invariable l'energía total del moviment abans i després de la pertorbació. En general, pot succeir que un moviment sigui inestable près d'un modo absolut, mes pugui ésser estable quan les pertorbacions estàn subjectes a determinades limitacions o condicions. Així, per exemple, una trajectoria circular deguda a una força central en raó inversa de la distancia, és estable respecte d'aqueixa coordenada i de la velocitat; mes no presenta estabilitat absoluta per a les coordenades x i y, ja que el moviment pertorbat és elíptic, i, al creixe el temps, la distancia en arc entre'ls punts corresponents d'ambdós moviments creix sense límit; en canvi, si les pertorbacions són conservatives, hi ha estabilitat inclòs en les coordenades x i y.

Dins l'Astronomía, s'adopten encara altres criteris d'estabilitat. Poden referir-se a dos: 1.er *Hi ha una superficie tancada que embolcalla els astres, els punts de la qual se troben a distancia finita, i tal, que no poden atravessar-la aquells per a cap valor del temps.* 2.on *Un astre podrà apartar-se quan se vulgui de sa posició inicial, mes per a valors finits del temps ve a passar tan aprop com se vulgui de sa posició inicial.* El primer dels dos criteris precedents d'estabilitat pot anomenar-se de Hill-Bohlin; el segón és lo que se'n diu estabilitat de Poisson.

Per a investigar l'estabilitat segons el primer criteri enunciat, el procediment directe consistiría, evidentment, en resoldre les equacions del moviment pertorbat. Mes la dificultat de tal resolució fà el mètode impossible, donat l'estat actual de l'Anàlisi. No obstant, d'un modo o d'un altre, és l'únic procediment quan els mètodes més senzills que veurem després no poden aplicar-se de cap manera. La solució de les equacions diferencials, quan no hi ha més remei que acudir a sa solució, es sol obtenir mijançant series, mes la major dificultat la porta el fet de que amb aquestes series s'han de calcular els valors de les pertorbacions per a valors molt reculats del temps, i succeeix, generalment, que les series deixen de convergir així que el temps passa cert límit.

Mètodes hi ha, senzills, aplicables a casos restrets, que permeten assegurar l'estabilitat amb les soles donades, amb les que poden calcular-se si's satisfàn determinades condicions què, de complir-se, asseguren l'estabilitat, sense que pugui dir-se que, en general, se coneixin les condicions *necessaries*, ni tampoc quan les condicions *suficients* són conegudes. No obstant, el nombre de casos en què poden donar-se les condicions necessaries i suficients augmenta amb el progrès de l'Anàlisi. Aquests mètodes senzills (relativament) se redueixen als fundamentals: un que refereix la qüestió a l'anàlisi algebric de funcions especials i de què és tipu el conegut teorema de Lagrange, demostrat rigurosament per Dirichlet, i altre d'aproximacions successives en què les pertorbacions s'expressen en forma de desenrotllos en series, obtinguts per recurrencia, i quina primera aproximació — a voltes prou per a definir l'estabilitat, a voltes insuficient — forma el mètode anomenat de les oscil·lacions. En aqueix mètode, quan val, l'estabilitat se refereix al signe de la part real de les arrels d'una equació algèbrica.

II. REGONEIXEMENT DE L'ESTABILITAT PEL MINIM D'UNA FUNCIÓ

1. *Teorema de Lagrange-Dirichlet i extensió del mateix deguda a Liapounow. Inestabilitat de l'equilibri en el cas d'un màxim de l'energía potencial. Estabilitat en sistemes astàtics.*

Si en una posició d'equilibri hi ha una funció de forces continua, i és màxima, l'equilibri és estable. La clàssica demostració de Dirichlet ve a ésser lo següent: Sigui *o* el valor de la funció de forces U en la posició d'equilibri. Per a configuracions veïnes, U serà negativa. Sigui U' un valor de U corresponent a una d'elles, T la força viva del sistema pertorbat i T_0, U_0 els valors inicials de T i U. En tot instant,

$$T = U + h$$

essent h constant. Suposem $|U'| > h > |U_0|$. Es evident que $|U|$ no pot valer $|U'|$, perquè, per a aquest valor, T, què és essencialment positiva, no podría ser-ho. Per consegüent, els valors de les coordenades no podràn arribar a tenir valors per als que $U = U'$. La força viva té, ademés, un límit superior finit per a tot valor del temps.

Per a indicar les extensions del teorema anterior, degudes a Liapounow, donarem abans a coneixe la terminología per ell empleada.

Una funció F $(x_1 \ldots x_n, t)$ de les variables x i del temps se dirà de signe constant quan, a partir de cert valor de t, i per a $|x_r| < H$, essent H tan petit com se vulgui, té un sol signe.

Una funció F $(x_1 \ldots . x_n)$ s'anomena definida, quan $F = o$ sols pot tenir lloc per a $x_1 = x_2 = \ldots . x_n = o$.

Una funció F $(x_1 \ldots . x_n, t)$ és definida quan $F - W$ o $-F - W$ és de signe constant i positiu, essent W definida en el sentit anterior.

Una funció F $(x_1 \ldots . x_n\, t)$ és limitada quan H pot escullir-se prou petita per a que, al creixe t, hi hagi un límit superior per a F, límit que pot ésser zero.

F' representa la derivada total de F respecte a t.

Tenint present lo anterior, fàcilment s'entendràn les extensions de Liapounow:

«*Si les equacions diferencials del moviment pertorbat són tals que és possible trobar una funció definida F, quina derivada F' sigui de signe fixe i contrari al de F, o se redueixi a zero, el moviment no pertorbat és estable.*»

«*Si F admet un límit superior, indefinidament petit, F' és definida, i, per a tot valor* $t > t_1$, *F pot pendre el signe de F' hi ha inestabilitat.*»

Aquest teorema, així com l'anterior i altres semblants que podríen enunciar-se, se demostren pel procediment de Dirichlet.

Aplicat l'últim enunciat al cas d'una funció de forces holomorfa en les coordenades i independent de t, de modo que $U = U_m + U_{m+1} + \ldots .$, essent U_m de grau $m > 2$ en les coordenades, quins valors per a les posicions d'equilibri se suposen nuls, porta a la proposició següent:

«*Si en l'equilibri U és mínima i el mínim se regoneix en els termes d'ordre menys elevat del desenrotllo de U en serie, el moviment és necessariament inestable.*»

La dificultat en l'aplicació general d'aquestes extensions de Liapounow està en formar les funcions F.

En alguns sistemes particulars, l'estabilitat de l'equilibri resulta d'anàlisis més senzills que el de Lagrange-Dirichlet, o, millor dit, aquest se simplifica. Per exemple, en els sistemes astàtics en els què si x, y, z són les coordenades del punt d'aplicació de la força (X, Y, Z), l'equilibri és estable o inestable, segons que $S \gtrless o$, essent

$$\begin{aligned} S = {} & \alpha^2 \Sigma xX + \beta^2 \Sigma yY + \gamma^2 \Sigma zZ \\ & + 2\alpha\beta \Sigma xY + 2\alpha\gamma \Sigma xZ + 2\beta\gamma \Sigma yZ \\ & - \Sigma xX - \Sigma yY - \Sigma zZ \end{aligned}$$

i $\alpha\beta\gamma$ els cosenos directors de l'axe d'equilibri.

En el cas de dues dimensions, el virial $\Sigma(xX + yY)$ determina per son signe l'estabilitat o inestabilitat.

2. *Regions atraients i repulsives en un camp de força. Teorema de Hadamard. Treballs de Painlevé i Cotton sobre inestabilitat en el cas d'ésser U holomorfa. Cas en què U no és holomorfa.*

«*Si un punt se mou en una superficie regular i d'un nombre finit de fulles, essent l'energía potencial V regular i amb un nombre finit de màxims i mínims, o bé la longitut de la curva en la regió atraient és infinita, o tendeix asimptòticament a una posició inestable d'equilibri.*» En aquest enunciat s'anomenen atraients o repulsives regions per a les que $J \gtrless o$ en l'expressió

$$J = \Delta_1(V)\Delta_2(V) - \frac{1}{2}\Delta(V\Delta_1(V))$$

essent $\Delta_1 \Delta_2 y \Delta$ els paràmetres diferencials coneguts. En general, l'òrbita atravessa la regió $J > o$ un nombre infinit de vegades.

Aquest teorema, que pot generalitzarse, indica el caràcter general de les trajectories en les regions anomenades estables o inestables.

Per al cas de moviment plà o de dos variables, Painlevé ha pogut demostrar que, d'ésser U de segón ordre, holomorfa i mínima, si $T_0 < U_0$ el mòvil surt necessariament en un temps finit d'una circumferencia de radi ρ a l'entorn de la posició d'equilibri, que resulta, segons això, inestable; però pot disposar-se de la direcció de la velocitat inicial de modo que al cap d'un temps finit arribi sense velocitat a la curva $U \mp h = o$ i retrogradi després. Si $T_0 = U_0$ el punt, o surt d'aquella circumferencia o se'n va a l'origen, poguent-se disposar de la direcció inicial per a que el moviment sigui asimptòtic. Si $T_0 > U_0$ pot arribar a l'origen en temps finit. Si U no és màxim ni mínim, i la posició d'equilibri és aillada, la curva $U = o$ té diverses branques separant regions en les que U és positiva d'aquelles en què U és negativa. Si totes les tangents en l'origen a les diverses branques són reals, llençant el mòvil en una regió de U positiva amb força viva inferior a U, el mòvil atravessa segurament la circumferencia de centre l'origen i radi ρ prou petit. Hi ha, doncs, inestabilitat també. Disposant de la direcció inicial, pot fer-se que T s'anuli al cap d'un temps finit, i el mòvil retrogradi. Si $T_0 = U_0$, el mòvil, o surt de l'esmentat circuit o va a l'origen asimptòticament. Hi ha, per lo tant, al menys tantes trajectories asimptòtiques quantes regions positives hi hagi.

Aquests teoremes són susceptibles de generalitzarse per al cas de més variables, i foren obtinguts també per Kneser. Posteriorment Cotton s'ha ocupat de la inestabilitat en el cas de moviment pla o amb dos graus de llibertat, demostrant que encara que les tangents en l'origen a la curva $U = o$ siguin imaginaries, si U és holomorfa i no és màxima, estant aillada la posició d'equilibri, hi ha inestabilitat necessariament.

Mes no hi ha que concloure d'aquí, per una inducció prematura, la verossimilitut sisquera de què quan U deixa d'ésser màxima hi hagi inestabilitat sempre. El següent exemple, degut a Painlevé, ho demostra palpablement. Se té en ell una posició d'equilibri estable, a pesar de que la funció de forces pren en punts tan a la vora d'ella com se vulgui, valors de signes contraris. Sigui :

$$U = \frac{m}{2} x^5 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Suposarem el punt mòvil en l'axe x. La posició $x = o$ és posició d'equilibri; U, U' i U'' són continues quan x varía de $+\Sigma$ a $-\Sigma$ i s'anulen per a $x = o$. Ademés, U és parella i positiva per a $2k\pi < \frac{1}{|x|} < (2k+1)\pi$, negativa si $(2k+1)\pi < \frac{1}{|x|} < (2k+2)\pi$; ($k \geq o$ i sencer). Per consegüent, queda demostrat que U pot tenir valors positius i negatius tan aprop com se vulgui de l'origen, doncs no més cal pendre k prou gran.

La posició $x = o$ és estable. La integral de forces vives dóna:

$$x'^2 = x^5 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + h. \tag{2}$$

Posem :

$$a_k = \frac{1}{(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}}$$

i marquin-se a l'axe x els punts $x_k = a_k$, $x_{-k} = -a_k$. Per a $x = \pm a_k$, el segón membre de (2) es redueix a $h - a^5$. Segons això, si h és negatiu o nul, x no pot surtir de l'interval x_k, x_{k+1} o x_{-k}, x_{-k+1}, que comprèn la posició inicial x_0. Si h és positiu, fem que a_k sigui més gros que x_0 i $h^{\frac{1}{5}}$. El punt x no podrà surtir de l'interval $x_k x_{-k}$. Per consegüent, x estarà dins d'un segment que tendeix a reduir-se a l'origen quan h decreix cap a zero. O, dit d'un'altra manera, prenent ε positiva i tan petita com se vulgui, x o x' durant el moviment quedaràn compreses entre $+\varepsilon$ i $-\varepsilon$, si $|x_0|$ i $|x'_0|$ són prou petits. Amb lo que queda demostrat que és estable l'equilibri.

En l'espai podría considerar-se l'exemple semblant:

$$U = \frac{m}{2} \left[x^5 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - y^2 - z^2 \right).$$

En aquests exemples hi ha realment una infinitat de posicions d'equilibri prop de l'origen.

Com a resum de lo dit, resulta que coneixem certes condicions que, de realitzar-se, asseguren l'estabilitat de l'equilibri, mes d'un modo general, tals condicions no són necessaries, es a dir, que hi pot haver equilibri estable sense elles. En certs casos, però, les condicions suficients esdevenen a la vegada necessaries.

El següent quadre dóna idea de l'estat actual d'aquestes condicions:

	U holomorfa		
Dos variables	U màxima.	Estabilitad	(Dirichlet)
»	U no màxima	Inestabilitad	(Painlevé, Cotton)
n »	U màxima	Estabilitad	(Dirichlet)
»	U mínima, reconegut el mínim per los termes de grau inferior en el desenrotllo de U.	Inestabilitad	(Liapounow)
»	Presencia en U de termes de segon ordre, majors que cero, suposant $U = 0$ en la posició d'equilibre	Inestabilitad	

3. *Aplicació del criteri de Lagrange. Figures de Plateau i elàstiques*

El teorema de Lagrange redueix les condicions que asseguren l'estabilitat a les que entranya l'existencia d'un mínim de certa funció. La clàssica demostració de Divichlet, que val sols per un nombre restret de paràmetres, pot sense dificultat extendre's al cas d'un nombre tan extens com se vulgui, i fer-la així aplicable a fils, membranes, plaques, masses flúides i cossos elàstics. L'energía potencial és, en tals casos, una integral, i l'anàlisi de l'estabilitat cau dintre del càlcul de Variacions. Generalment hi ha condicions suplementaries que'l classifiquen dintre dels problemes anomenats isoperimètrics.

Recordarem a grans trets que l'anulació de la primera variació porta a les equacions d'Euler, les qui defineixen les curves extremals i quines constants se determinen per les condicions límits i isoperimètriques. Mes és sabut que per a assegurar el mínim cal, ademés: 1.^{er} L'existencia de l'anomenat camp d'extremals, o, dit d'altre modo, que dues extremals properes no's tallin vora el segment de curva que resolt el problema, condició que's comprova examinant el valor del determinant funcional de les coordenades respecte de les constants que figuren en les extremals. Si aquest determinant no és zero, se compleix la condició de mínim anomenada de Jacobi. 2.^{on} Que tinguin lloc les condicions anomenades de Legendre o de Weierstrass-Hilbert, segons se vulgui mínim dèbil o fort, es a dir, mínim respecte a curves poc inclinades amb la que és solució o respecte a curves properes quines tangents fassin qualsevulga angles amb aquella. Es sabut que aquestes condicions per al cas de curves planes i per a l'integral $\int F(x, y, y')dx$, són:

de Legendre: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y') > o,$

essent x, y, y' valors corresponents a la curva solució;

de Weierstrass Hilbert: $E = F(x, y, u) - F(x, y, y') + (y' - u)\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) > o$, essent $u(xy)$ la inclinació de la tangent en el punt xy de l'extremal, mesurada per sa tangent, y' la tangent a una curva qualsevol del camp d'extremals, valor que pot ésser qualsevulga. Entre'l sens fi d'exemples que podría citar, n'escolliré dos solzament, un près de la teoría de la Capilaritat i altre de la teoría de la Elasticitat.

Es sabut que les superficies que limiten les figures de Plateau ho són de curvatura mitja constant, lo qual es conseqüencia de que l'energía potencial s'admet proporcional a la superficie i de l'anulació de la primera variació. El volum total limitat per a la dita superficie és una donada, i la superficie està, ademés, subjecte a la condició de passar per determinats punts o linies (anelles que sostenen les figures). Entre les superficies de curvatura constant hi ha el cilindre de revolució i l'alisseide, quine meridiana és la catenaria i quin axe de revolució és la directriu d'aquella curva. Aquestes dues figures, cilindre i alisseide, corresponen a distancies determinades entre les dues anelles coaxials que sostenen la gota de Plateau, distancies que són funció del radi de les anelles i de la constant capilar de l'oli en la barreja d'aigua i alcohol. Ara bé; la condició de Jacobi imposa, en el cas del cilindre, que l'altura no excedeixi al perímetre de la secció recta, i en el cas de l'alisseide, en què la curvatura mitja és nula, que en l'arc de catenaria meridiana que va d'una a altra anella no hi hagi focus o punts conjugats, és a dir, punts tals que ses tangents se tallin en un punt de la base o directriu. Considerant en la catenaria meridiana el punt comú a un dels anells, la curva lloc geomètric de focus o envolvent de catenaries que passant per un punt tenen una recta donada per directriu, és una curva semblant a una paràbola. Si l'altra anella talla al pla meridià ja considerat en un punt interior a la dita envolvent, hi ha una catenaria estable de les dues que resolen geomètricament el problema. Si cau aquell punt fòra de la envolvent, la solució continua és impossible.

En el cas del cilindre, aplicable també a la vena flúida per la resolució de la vena en gotes a conseqüencia de la inestabilitat de la forma cilíndrica quan la longitut és més grossa que el perímetre de la secció recta, pot calcular-se el tò del sò de la vena que cau sobre un pla.

En segón lloc considerarem la curva anomenada elàstica plana. La funció que ha d'ésser mínima en el cas d'una curva estable és

$$\mathrm{EI}\int\frac{ds}{\rho^2}$$

amb les condicions límits d'apoiar-se, d'empotrament, etc., i la isoperimètrica de tenir una llargada coneguda. L'anulació de la primera variació porta a la coneguda equació diferencial de l'elàstica, semblant a la del pèndol simple; les condicions de Jacobi i Weierstrass són, en aquest cas, bastant complicades; d'elles se'n treu, per exemple, que quan no hi ha punts d'inflexió l'arc de l'elàstica és realment mínim; mes en altres casos encara no s'han precisat prou bé les condicions necessaries i suficients d'estabilitat, sols de les de Jacobi se'n ha pogut treure alguns resultats interessants, que recordaré breument, com per exemple la condició d'Euler per a vigues rectes subjectes a compressió. Així, per exemple, si una viga ve empotrada per un extrem inferior i en l'altra obra una força P, la condició de Jacobi porta a

$$l^2\mathrm{P}<\frac{\pi^2}{4}\mathrm{EI}$$

essent l la longitud. Altres casos es poden tractar del mateix modo; per exemple: una força obra en el cap a d'una barra rígida solidaria per l'altre cap b, de la viga dreta i d'igual direcció que aquesta.

Segons a sigui més alt o més baix que b, la condició de Jacobi porta a una o altra de les dues fórmules

$$l\sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}}=\frac{\pi}{2}\mp\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}r^2}}$$

r = longitut de la barra.

III. — Anàlisi de l'estabilitat pel mètode de les aproximacions successives

1. *Idea del mètode. Primera aproximació en el cas de moviments permanents o estacionaris. Mètode de Routh per a expressar les condicions de suficiencia a què porta la primera aproximació. Cas d'arrels iguals en l'equació característica.*

El mètode d'aproximacions successives és el següent: Sigui un estat d'equilibri o de moviment quina estabilitat se busca. Siga un altre estat de moviment, que, en un moment donat, ve caracteritzat per a valors dels paràmetres que el defineixen, els quals valors siguin poc diferents dels que corresponen al moviment no pertorbat. Siguin $x_1 x_2 ....$ tals diferencies o pertorbacions, de modo que, per a $x_1 = x_2 = ... = o$ se té l'equilibri o moviment que s'analitza. Les equacions diferencials de les pertorbacions tindràn la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = X_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = X_2 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

essent X funcions holomorfes de $x_1 x_2 ....$ desenrotllables en serie, segons les potencies de tals quantitats i quins coeficients seràn funcions de t en general.

Aquestes equacions se satisfàn formalment del següent modo.

Posem:

$$x_s = x_s^{(1)} + x_s^{(2)} + ... \qquad (s = 1, 2 .... n) \qquad (2)$$

$x^{(r)}$ representa una funció de t a la que s'atribueix cert ordre en un paràmetre determinat, quina magnitut sigui comparable a una pertorbació. Substituint en les equacions (1) aquesta solució i separant els diversos ordres, s'obtenen equacions de la forma

$$\frac{dx_s^{(r)}}{dt} = p_1 X'_{rs} + p_2 X''_{rs} + ... + \Phi_{rs}$$

essent p_1, p_2, etc., funcions de t i les X_r funcions de les $x_s^{(r)}$, lineals; Φ_{rs}, finalment, una funció de $x_s^{(j)}$ $(j<r)$.

Per a resoldre aquestes equacions se substitueixen en Φ_{rs} els valors de $x_s^{(j)}$ donats pels sistemes anteriors i cada vegada se resolt de nou el sistema lineal, en general no homogeni que així es forma. Del valor de la serie (2) i de sa convergencia ens ocuparem més endavant.

La primera aproximació s'obté quedant-se a $r=1$ i suposant que les pertorbacions són *sempre* petites, limitant els desenrotllos de X als termes lineals en les x i suposant que no són tots nuls. Així s'obté un sistema d'equacions lineals amb coeficients que són en general funcions de t.

Suposem que per un o altre medi s'ha resolt el sistema lineal d'equacions. Les solucions seràn funcions de t i de les constants o pertorbacions inicials. *Si atribuint valors finits a les pertorbacions, per a un valor qualsevol del temps, inclús per* $t = \infty$ *se poden determinar per a les constants inicials, valors finits també, no nuls, encara que uns i altres siguin tan petits com se vulgui,* se sol dir que hi ha *estabilitat.*

En cas contrari, és a dir, *quan al creixer* t *indifinidament els valors de les constants* *inicials s'han de fer zero per a asegurar a les pertorbacions valors finits inferiors a cert límit, se sol dir que hi ha inestabilitat.*

Si no hi hagués en els desenrotllos de X més que termes de primer grau en x, les conclusions anteriors seríen llògiques. Mes si hi ha en X altres termes, aquelles conclusions no tenen cap valor llògic. En efecte: no s'havía suposat que les pertorbacions eren petites? I amb tal hipòtesis, no'ns hem permès despreciar els termes de grau superior al primer en el desenrotllo de les X? Doncs bé, si després surt que, efectivament, per a tot valor del temps les pertorbacions són petites, no és això un cercle viciós? I si surt que no són petites, quína altra cosa podem arribar a deduir sinó que de la primera aproximació no n'hi ha prou per a donar idea del moviment?

Per això, si el càlcul de la primera aproximació ve a corroborar l'hipòtesi, no val la pena de fer-lo, i si no convé a la hipòtesi, és inútil.

Resulta, doncs, que, a priori, sense previ anàlisi, no pot afirmar-se que la primera aproximació ho sigui realment; i encara més: poden citar-se exemples en què, efectivament, el moviment de primera aproximació apenes té que veure amb el moviment real.

No obstant, no hi ha que treure de tot això que el *mètode de les oscilacions*, que és com comunment s'anomena a la primera aproximació, no tingui ni el més petit interès o la més escassa utilitat. Del anàlisi del matemàtic Liapounow resulten, conforme veurem més endavant, les condicions per a poguer fiar en els resultats del mètode de les oscil·lacions; mes, per desgracia, aquest anàlisi és encara incomplet, de modo que, avui, pot dir-se que no posseim manera de saber a priori, amb tota generalitat, quan la solució del mètode d'oscil·lacions és prou per a assegurar l'estabilitat. La qüestió té moltes dificultats, que minven una mica quan els coeficients de les x en els termes lineals dels desenrotllos són constants o periòdics, mes fins en aquests casos tampoc pot dir-se que la qüestió estigui completament resolta.

Suposem que els coeficients p siguin constants. Es ben sabut que, introduint solucions de la forma $x_1 = a_1 e^{\lambda t}$, $x_2 = a_2 e^{\lambda t}$, etc., en què les a són constants, λ ve donat per una equació $f(\lambda) = o$ de grau n, si n és el nombre de pertorbacions. El caràcter de les arrels d'aquesta equació anomenada característica, defineix la estabilitat en primera aproximació.

«*Si la part real de totes les λ és negativa i les arrels són diferents totes, el moviment és estable, i tal, que asimptòticament és igual al moviment no pertorbat.*»

Es evident que tals condicions són suficients, dintre, naturalment, de la aproximació de que's tracta.

El mateix pot dir-se del cas d'arrels totes diferents «*si la part real de certes arrels imaginaries és nul·la i les demés la tenen negativa.*»

Així, doncs, per a deduir l'estabilitat bastarà veure quines condicions deuen satisfer els coeficients per a que les anteriors condicions se compleixin.

S'han donat per això diferents criteris, mes aquí sols exposarem el de Routh que resulta immediatament del teorema de Cauchy que diu que el nombre d'arrels de $f(z)=P+ i\ Q=o$ dins un contorn determinat és igual a la meitat de l'excés de vegades per les que $\frac{P}{Q}$ passa de positiva a negativa passant per zero sobre les vegades en que del mateix modo passa de negativa a positiva.

Escullint com a contorn una semicircumferencia de radi molt gran i situada en la part positiva de l'axe y, limitada ademés per aquest, com en ella $\frac{P}{Q}$ s'anula per $n\theta=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, i's fa infinita per $n\theta=2k\frac{\pi}{2}$, i aquests valors separen als anteriors, no hi haurà cap arrel dintre del contorn considerat si al llarg de l'axe y hi ha el mateix nombre de canvis de signe de — a + que en la semicircumferencia els hi hagi de + a — recorrent tot el contorn en determinat sentit. Així, doncs, si escrivim en $f(z)=o$, en lloc de z, $i\ y$, i se separen les parts reals de les imaginaries, les arrels de l'equació de més petit grau han de separar les arrels de l'equació de grau superior. Ademés, la circumstancia de ésser negativa o nul·la la part real de les arrels, imposa el mateix signe a tots els coeficients de $f(z)$ com així resulta de la descomposició de $f(z)$ en factors binomis.

La separació mutua d'arrels pot traduir-se en la següent regla de Routh, semblant a la coneguda de Sturm: «Trobi's el m. c. d. de P_1 i Q_1, essent P_1 i Q_1 els valors de P i Q després de la substitució $z=i\ y$, i canviin-se els signes dels restes abans de ésser divisors.

Suposem, en primer lloc, que P_1 i Q_1 no tenen cap factor comú. Es sabut que si un dels restes s'anul·la per a un valor determinat de x, els dos immediats tenen valor de diferent signe. Per consegüent no hi haurà variació en els signes de la serie dels restes a menys d'atravessar un valor de x pel que la funció de grau superior, sigui P_1 o Q_1, s'anul·li.

Per lo tant, les arrels de $P_1=Q_1=o$ seràn reals i recíprocament separades, si en la serie formada per P_1, Q_1 i els restes amb signe canviat, el nombre de variacions perdudes al passar de $x=-\infty$ a $x=+\infty$ és igual al major dels graus de P_1 o Q_2, o lo que és igual si els coeficients de les majors potencies de y en aquestes funcions són positius tots.»

La regla pot simplificar-se, i pel detall de les simplificacions el lector pot recorre al llibre de Routh. Moltes vegades s'arriba així a condicions que no són totes independents o que ja són conegudes per ésser equivalents a la igualtat de signe dels coeficients de $f(z)$.

Si hi ha alguna arrel $+ i\ a$, deu haver-hi la conjugada, i per consegüent en $f(z)$ hi ha un factor (z^2-a^2) que serà comú a P_1, Q_1 i als restes, i quina existencia se regoneix per l'anul·lació d'algún d'ells. Recíprocament, la anul·lació idèntica de un reste significa la presencia d'un factor comú a P_1 i Q_1 igual al producte de binomis corresponents a arrels iguals i contraries. Posant, aleshores, $f(z)=\Psi(-z^2)\varphi(z)$, a $\varphi(z)$ pot aplicar-se el teorema de Cauchy. Per a expressar, finalment, que les arrels de $\Psi(-z^2)=o$ no tenen part real (d'altre modo una z tindría part real major que o] basta considerar que si $p_1+p_2z^2+ \ldots.$ té totes les arrels de la forma $i\,y$, la funció $p_1-p_2y^2+p_4y^4- \ldots.$ té reals totes les arrels, i les condicions per a que això tingui lloc, les dóna el teorema conegut de Sturm, que partint de l'equació i sa derivada, aplica un algoritme enterament semblant a l'indicat ara mateix per a P_1 i Q_1.

S'ha suposat fins aquí que totes les arrels eren diferents. L'existencia d'arrels iguals introdueix termes de la forma $t^n e^{\lambda t}$. Si λ és positiu, no hi ha límit per a tals termes, mes si és negatiu, el producte pot o no tenir un límit finit al creixer t indefinidament. El verdader valor de $t^n e^{-\lambda t}$ per a $t=\infty$ és zero de modo que el moviment és asimptòticament estable encara que les perturbacions poden arribar a ésser bastant grosses per a valors finits de t.

Lagrange creia que l'existencia d'arrels iguals destruía l'estabilitat, mes tal criteri no és acceptable.

Cap investigar les condicions que han de complir els coeficients per a que els termes $t^n e^{\lambda t}$ corresponents a arrels iguals siguin zero, de modo que la resolució queda nèta de termes seculars. Aquestes condicions són si hi ha r arrels iguals, que tots els determinants d'ordre $j<r$ de l'equació característica, siguin nuls.

2. *Equacions en forma canònica. Aplicacions a l'equilibri i als sistemes cíclics conservatius.*

Quan les equacions (1) són canòniques, l'equació característica ve en forma d'una funció de λ^2. Anem a considerar, com exemple de lo anterior, dos casos en que, mitjançant el mètode de les oscil·lacions se demostra un criteri de convergencia que cau dintre dels casos examinats en la segona part d'aquest treball. La demostració és clàssica i per això la citem. Ambdós casos suposen que la funció H de les canòniques és definida i positiva, ademés de quadràtica i no dependre explícitament de t.

Sigui una posició d'equilibri i considerem un moviment pertorbat en ausencia de frec. La funció H és aleshores la suma de l'energía cinètica i l'energía potencial, i serà, per lo tant, definida si aquesta ho és. Si, ademés, H s'anul·la per a la posició d'equilibri, i és positiva a l'entorn, el nou criteri no difereix del de Lagrange-Dirichlet. Es sabut que, quan se tenen dues formes quadràtiques, i una d'elles (la força viva) és definida, és possible mitjançant substitucions lineals transformar-les en dues sumes de quadrats tals com

$$2T = x'^2_1 + x'^2_2 + \dots$$
$$2V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots$$

essent las λ reals, i, en el cas concret de ésser V definida i positiva, totes positives. La condició de realitat fou demostrada per Sylvester, i sa demostració és ben coneguda; la d'ésser positives totes, és conseqüencia de les condicions generals a que deu satisfer una forma quadràtica per a que sigui definida i positiva o sigui que son discriminant i menors principals siguin nuls. Ara bé, amb les noves fórmules per a T i V les canòniques donen directament

$$x_1 = x_1^0 \cos(\lambda_1 t + \alpha_1), \text{ etc.},$$

lo que demostra l'estabilitat.

Sigui un moviment tal, que la força viva i energía potencial siguin funcions quadràtiques de les velocitats i coordenades que defineixen son estat. Si alguna coordenada no figura en la força viva ni en l'energía potencial, s'anomena *cíclica*. Les canòniques en aquest moviment, porten desseguida a tantes integrals com coordenades cícliques hi hagin, integrals que expressen que els moments cíclics són constants. Els moviments corresponents a les solucions particulars en què els valors de les variables no cícliques se suposen nuls i les coordenades corresponents constants, s'anomenen «moviments estacionaris».

Té singular interès l'estabilitat de tals moviments en el supòsit de conservar en el moviment pertorbat els mateixos valors per als paràmetres cíclics.

La funció H que figura en les canòniques del moviment pertorbat serà la suma de l'energía cinètica i la potencial, però, expressada en funció de les coordenades i paràmetres no cíclics, serà una funció quadràtica dels mateixos amb termes de la forma pq, és a dir, producte d'un paràmetre per una velocitat, termes anomenats «giroscòpics», els quals compliquen el problema.

No obstant, mitjançant una senzilla transformació de contacte que no introdueix més que operacions algèbriques, i, que, com és ben sabut no altera la forma canònica de les equacions (1), és possible donar a H la forma $H = \frac{1}{2}\Sigma(p^2 + sq^2)$. Feta la transformació és possible demostrar que, si H és definida i positiva, les s són positives, de manera que les noves coordenades vindràn expressades en forma trigonomètrica sinoidal del temps, i essent les primitives funcions lineals de les noves, la estabilitat serà la conseqüencia de la possibilitat de dita expressió.

---

(1) Vegis la paraula Equacions a l'*Enciclopedia Espasa*.

Weierstrass s'ocupà en determinar els valors de les coordenades no cícliques en el moviment pertorbat expressades en forma de series trigonomètriques de senos i cosenos. Weierstrass partí de la substitució

$$\begin{matrix} q_r \\ p_r \end{matrix} = \int_c \frac{l_\mu(s)}{f(s)} e^{s(t-t_0)} ds \qquad \mu = {}^r{}_{n+r}.$$

C és una circumferencia que encercla totes les arrels de $f(s)=o$ essent $f(s)$ el determinant del sistema:

$$sp_r + \frac{\partial H}{dq_r} = o$$

$$-sq_r + \frac{\partial H}{\partial p_r} = o$$

i els polinomis l estàn subjectes a anul·lar-se tota vegada que s sigui igual a una de les arrels de $f(s)=o$.

Resulta així que, en moviments estacionaris, si H és definida i positiva, hi ha segurament estabilitat. Mes no hi ha que deduir d'això que tal condició sigui necessaria. Encara que H sigui quadràtica no pot afirmar-se que en tot moviment estacionari estable H sigui necessariament definida i positiva, doncs poden mostrar-se exemples en què, no essent H definida hi ha estabilitat. La presencia dels termes giroscòpics complica aquí el problema respecte al cas d'equilibri, encara que s'assembli a ell en certa manera.

Un dels casos més interessants que cau dintre de lo que anem exposant en aquest capítol, és el de l'equilibri relatiu de cossos en moviment de rotació a l'entorn d'un axe. La velocitat angular de rotació es suposa invariable en el moviment pertorbat. Per aquest cas particular se coneixen tres criteris d'estabilitat, tots suficients, mes cap necessari.

Regla de Lord-Kelvin: «Quan la suma de l'energía potencial directa i la procedent de les forces centrífugues ordinaries és mínima l'equilibri és estable.»

Regla de Poincaré: «Suposant nul el moment de les forces exteriors respecte de l'axe de rotació, el moviment serà estable si la suma de l'energía potencial i $\frac{1}{2}\frac{I^2_{z0}\omega^2}{I_z}$ és mínima pel moviment que s'analitza.» En aquest enunciat, I_{z0} és el moment d'inercia respecte a l'axe de rotació en el moviment no pertorbat, I_z en tot moviment pertorbat compatible amb les lligadures, i ω és la velocitat de rotació.

Regla de Liapounow. «Considerant un sòlid amb un punt fixe i una rotació a l'entorn d'un axe principal d'inercia, si

$$U + \frac{I_x I_y - P_z^2}{\Delta} \frac{I^2_{z0} - \omega^2}{2}$$

és mínima, la rotació és estable. En aquesta fórmula, I_x i I_y, són els moments d'inercia respecte als axes x i y, i $P_z = \int xydm$ essent m l'element de massa, i Δ el discriminant de $\frac{1}{2} I_x X^2 + \ldots - P_x YZ - \ldots$ En l'enunciat se suposa, ademés, que el moment de les forces exteriors respecte de l'axe z és nul, i que el mínim s'estableix respecte als moviments compatibles amb les lligadures.

D'aquests tres criteris, cada un és més restrictiu que el que el precedeix, és a dir, aplicable a més petit nombre de casos; en canvi, cada un pot preveure casos determinats que escapen als anteriors.

I sempre poden existir casos d'estabilitat fòra dels criteris esmentats, que, ho repetim, són sols de suficiencia.

3. *Moviments estacionaris de Levi-Civita. Vibracions de relació. Cas en que són estables. Anàlisi d'aquestes vibracions per a les curves de Lissajous.*

Levi-Civita ha generalitzat la noció de moviments estacionaris pel cas en que es coneixen relacions invariants, és a dir, tals que permaneixen constants durant el moviment, en virtut de les canòniques i d'elles mateixes. Les expressions invariants, així com H, suma de l'energía cinètica i la potencial, se suposa que no contenen explícitament t, i ademés, que les primeres estàn en involució, és a dir, que són nuls els parèntesis de Poisson que poden formar-se amb elles dos a dos. En tals condicions, demostrà Levi-Civita l'existencia de moviments de caràcter estacionari en els que $\delta H = 0$. Aquesta condició es tradueix per l'existencia de relacions de la forma

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = m+1 \ldots n,$$

que, junt amb els invariants donats

$$p_r = f(q, p_j) \qquad r = 1, 2 \ldots m,$$

permeten eliminar totes les p i $n-m$ variables q del valor de H, de modo que les noves canòniques defineixen les m velocitats $\frac{dq_r}{dt}$ en funció de les coordenades q_r.

Per a fer més fàcil la comparació dels moviments estacionaris de que s'ha parlat abans, amb els de Levi-Civita, presentem l'adjunt quadre:

<table>
<tr><th>Routh</th><th>Levi-Civita</th></tr>
<tr><td>H no depen de $q_1 \ldots q_m$.

$\frac{dp_r}{dt}=0 \qquad (r=1, 2 \ldots m)$.

$\frac{\partial H}{\partial q_j}=\frac{\partial H}{\partial p_j}=0 \qquad (j=m+1 \ldots n)$.

D'aquestes equacions se treuen totes les p i els valors de q_j tots els que seràn constants.</td><td>$F_r(q, p)=0 \qquad (r=1, 2 \ldots m)$.

$[F_j F_g]=0 \qquad (f, g=r)$.

$\frac{\partial H}{\partial q_j}=\frac{\partial H}{\partial p_j}=0, \quad (j=m+1 \ldots n)$.

D'aquestes equacions se treuen totes les p i els valors de q_j en funció de q_r.</td></tr>
</table>

Portats aquests valors a les demés canòniques

$$\frac{dq_r}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial p_r},$$

<table>
<tr><td>donen valors de q_r proporcional al temps.</td><td>donen valors de q_r que resulten d'integrar el sistema d'ordre m que pot reduirse al ordre $m-1$, tenint compte de l'integral de forces vives.</td></tr>
</table>

En ambdós moviments, H és estacionaria.

En el paragraf anterior, s'ha analitzat l'estabilitat condicional dels moviments estacionaris de Routh. En els de Levi-Civita, l'estabilitat és també condicional, veiam respecte a quí.

Sempre és possible pendre com a coordenades els valors F_r i altres n-m funcions F_j en involució entre sí i amb F_r. A aquestes funcions poden associar-s'hi altres conjugades Φ tals que la transformació de F, Φ a p, q ho sigui de contacte. Les noves canòniques, atesa la invariancia de F_r, donaràn

$$\frac{\partial H}{\partial \Phi_r}=\frac{\partial H}{\partial F_u}=0,$$

i la condició $\delta\overline{H}=0$ en que $\overline{H}$ significa el valor de la funció amb les noves coordenades, porta a

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial \Phi_j}=\frac{\partial \overline{H}}{\partial F_j}=0.$$

Les Φ_j i F_j es presenten ara com les coordinades en un problema d'equilibri, i són les variables respecte de les que es defineix l'estabilitat, condicionada per ésser $F_r=0$ en els moviments pertorbats.

La major part de aplicacions dels criteris d'estabilitat a la Física i Inginyería no passen de la primera aproximació. Fóra cosa de mai acabar entrar en exemples. Hi ha llibres de teoría d'oscil·lacions aplicada a la Tècnica mecànica, elèctrica, naval, aeronàutica, etc.

Mes la insuficiencia de la primera aproximació és en teoría evident, si pensem que al portar a cap la segona aproximació ens trobem amb equacions linials no homogènies, quines integrals particulars seràn de la forma

$$\frac{N}{f(n)} e^{nt},$$

en la que, essent p, q,... els exponents de les pertorbacions en els termes de tercer ordre o més,

$$n = p\lambda_1 + q\lambda_2 + -$$

i $p+q+\ldots$ és el grau del terme considerat.

Si n no és arrel de l'equació característica $f(\lambda) = 0$, la solució particular anterior és acceptable, mes deixa d'ésser-ho en cas contrari, per lo què, si una arrel de l'equació característica pot expressar-se en forma linial i de coeficients sencers en funció d'altres, l'aplicació sense més ni més del mètode de les aproximacions successives porta a un terme secular que, d'ésser acceptable, destruiría l'estabilitat; mes, en rigor, succeeix que en tal cas no és aplicable el mètode d'aproximacions successives, i, per a resoldre les equacions del moviment, no's pot prescindir ni en primera aproximació de certs termes d'orde superior al segón en el desenrotllo de H.

L'existencia d'una arrel lligada a les demés en la forma dita, dóna lloc a les vibracions que Korteweg anomena de «relació».

Hi ha casos, no obstant, en que, una lleugera modificació en els valors de les arrels crítiques, com així ne direm de tals arrels, és prou per a poguer convenir al moviment que s'analitza. Per a demostrar-ho, siguin λ_k, λ_s les arrels crítiques, de modo que

$$\begin{aligned} q'\lambda_1 + b'\lambda_2 + \ldots\ldots K'\lambda_k + s'\lambda_s + \ldots\ldots &= \lambda_k \\ a''\lambda_1 + b''\lambda_2 + \ldots\ldots K''\lambda_k + s''\lambda_s + \ldots\ldots &= \lambda_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

Suposem que dels termes d'ordre superior al segón se conserven sols aquells que donen lloc a que no pugui acceptar-se la solució de primera aproximació. Portem a aquests termes els valors de les pertorbacions donats en primera aproximació, mes amb lleugeres modificacions, de manera que, si una pertorbació venía expressada per

$$M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots\ldots M_k e^{\lambda_k t} + M_s e^{\lambda_s t} + \ldots\ldots$$

posarem

$$M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + M_k e^{(\lambda_k + d\lambda_k)t} + \dots + M_s e^{(\lambda_s + d\lambda_s)t} + \dots$$

En la substitució se suposa que la petitesa en les modificacions atribuides a les λ és tal, que permet fer cas omís de les variacions que sufriràn les M.

Tindrem així una serie de equacions no homogenies, en que, eliminant totes les pertorbacions menys una, portaràn a una equació lineal no homogenia d'ordre igual al nombre de variables, en la que els termes que no contenen explícitament la funció incògnita x o ses derivades, seràn

$$N_k e^{(\lambda_k + d\lambda_k)t} + N_s e^{(\lambda_s + d\lambda_s)t} + \dots$$

Ara bé, si en l'equació diferencial s'hi proba la solució

$$x = X_1 e^{\lambda_1 t} + \dots X_k e^{(\lambda_k + d\lambda_k)t} + X_s e^{(\lambda_s + d\lambda_s)t} + \dots$$

se troba

$$f(\lambda_1) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X_k f(\lambda_k + d\lambda_k) = N_k$$

$$X_s f(\lambda_s + d\lambda_s) = N_s$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

d'aon, per ésser $f(\lambda_k) = 0$, $f(\lambda_s) = 0$, surt

$$d\lambda_k = \frac{N_k}{X_k f'(\lambda_k)}$$

$$d\lambda_s = \frac{N_s}{X_s f'(\lambda_s)}$$

etc.

I tals solucions seràn acceptables, si

$$K' d\lambda_k + \dots s' d\lambda_s + \dots = d\lambda_k$$

$$K'' d\lambda_k + \dots s'' d\lambda_s + \dots = d\lambda_s$$

etc.

Korteweg i Beth s'han ocupat en les vibracions de relació. L'últim, pel cas d'un mecanisme a dos graus de llibertat, n'ha fet un estudi sistemàtic, referint-lo al moviment d'un punt pesat en una superficie. Les curves de Lissajous que resulten en primera aproximació, no són vàlides ni acceptables sempre. Fàcil és veure, en efecte, que el sistema

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n_1{}^2x+2d_2xy=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n_2{}^2x+d_2x^2=0$$

quan $n_2 = 2n$, no admet la primera aproximació, perquè substituïts els valors de x i de y que dóna aquella en els termes de segón grau, les noves equacions diferencials presenten en ses solucions valors seculars inadmissibles. Per a resoldre les equacions en aquest cas crític, aplica Beth els mètodes ordinaris de la Mecànica del cel en la teoría de pertorbacions. Considera els termes de segón grau com derivades parcials de la funció pertorbatriu $-d_2x^2y$, resol les equacions en primera aproximació pel mètode de la integral completa de Jacobi i formula després la variació de constants per les canòniques a que satisfàn tals variacions, en que la nova H és la funció pertorbatriu. Les curves obsculadores del moviment són les de Lissajous corresponents a la primera aproximació. Del anàlisi, se'n dedueix, en general, estabilitat.

El mètode de Routh ja indicat porta a la següent relació entre amplituts dels moviments harmònics de primera aproximació:

$$X_0{}^2=8Y_0{}^2$$

En tal cas la curva descrita pel mòvil és una paràbola en que els períodes difereixen poc dels que dóna la primera aproximació. El mètode de Beth porta també a aquesta paràbola per altre camí.

Es natural que, si una vibració de relació no té lloc exactament, però sí amb molta aproximació, ja serà oportú no contentar-se amb la primera aproximació.

4. *Moviments periòdics. Coeficients característics. Index de Korteweg. Anàlisi de l'estabilitat en el cas Levi-Civita.*

Quan les equacions linials de primera aproximació en lloc de coeficients constants tenen coeficients periòdics, és sabut que hi ha solucions periòdiques de segona especie, de modo que tota integral pot expressar-se com una suma de n solucions independents d'aquesta classe, cada una multiplicada per una constant arbitraria. Mes tota funció periòdica de segona especie és susceptible de pendre la forma $e^{\alpha t}f(t)$, essent λ periòdica i amb el període 2π de modo que el multiplicador de tal funció és $e^{2\pi\alpha}$. Al nombre α se l'anomena *coeficient característic.*

Suposem diferents entre sí els exponents característics i tots de part real negativa o nul·la, o lo que és igual, que tots els multiplicadors siguin diferents i de mòdul inferior a l'unitat, és evident que la solució representa un moviment estable. Recíprocament, si un sol dels multiplicadors és de mòdul més gros que la unitat, hi haurà inestabilitat.

La presencia de dos o més exponents característics iguals porta a termes seculars a menys d'anul·lar-se tots els menors de primer ordre del determinant quines arrels són els multiplicadors, semblantment a lo que succeeix en el cas de coeficients constants.

Per a obtenir els exponents característics i un sistema integral d'equacions de segona especie, recordaré breument que el punt de partida és un sistema de solucions independents que poden ésser, per exemple, series ordenades segons les potencies de t o de un paràmetre que intervingui en les equacions, series quins coeficients venen en part determinats per aquelles mitjançant fórmules de recurrencia, i en part arbitraris $\big((n-1)\,n\big)$, poguent aprofitar-se tal indeterminació per a formar n solucions independents que seràn, per exemple, $\varphi_{11}{}^{(t)}$, $\varphi_{21}{}^{(t)} \ldots \varphi_{n1}{}^{(t)}$ per a q_1 ; $\varphi_{12}{}^{(t)}$, $\varphi_{22}{}^{(t)} \ldots \varphi_{n2}{}^{(t)}$ per a q_2 etc. de modo que

$$q_2 = C_1\varphi_{1r} + C_2\varphi_{2r} + \ldots C_n\varphi_{nr} \qquad \begin{array}{l} r = 1, 2 \ldots n \\ c_r = \text{const.} \end{array}$$

Mes com que els coeficients de les equacions diferencials són periòdics, $\varphi_{rs}(t+2\pi)$ és integral també; per consegüent, ha de poguer expresar-se en funció del sistema d'integrals φ_{rs}, lo que dóna lloc a la introducció de n^2 coeficients A.

$$\varphi_{rs}(t+2\pi) = A_{r1}\varphi_{1s}(t) + \ldots A_{rn}\varphi_{ns}(t) \qquad \left.\begin{array}{l} r \\ s \end{array}\right\} 1, 2 \ldots n$$

que poden determinar-se, per exemple, fent $t = o$.

Ara bé, si $\theta_{2s}(t)$ és una integral periòdica de segona especie, $\theta_{2s}(t+2\pi) = K_2\,\theta_{2s}(t)$, i per ésser integral.

$$\theta_{2s}(t) = B_{1r}\varphi_{1s}(t) + \ldots B_{n2}\varphi_{ns}(t)$$

Així, doncs, tenint en compte la condició anterior i el valor de $\varphi_{2s}(t+2\pi)$, s'arriba a una identitat en les φ que porta a l'anomenada equació característica per a determinar les λ_r:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda_r & A_{21} & \vdots \\ A_{12} & A_{22}-\lambda_r & \vdots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

El subíndex pot referir-se a q_r per exemple. Per les demés pertorbacions, l'equació característica és la mateixa, i per lo tant són iguals els exponents característics i fins el sistema de constants, mes no les solucions periòdiques, per ésser les B diferents per cada pertorbació.

Quan les equacions diferencials són canòniques, les arrels són dues a dues iguals i contraries. Existint l'integral uniforme de forces vives, hi ha dos exponents característics iguals a zero un per la tal integral, l'altre perquè H no conté explícitament el temps.

No és essencialment diferent de l'anterior el criteri de Korteweg per a l'anàlisi d'òrbites planes periòdiques. Korteweg analitza la dependencia amb el temps de la distancia normal de la posició perturbada a l'òrbita quina estabilitat s'examina. I anuncia el següent teorema: Siguin u_3, u_2, u_1, les distancies en l'interval d'un període. En primera aproximació,

$$\frac{u_3+u_1}{u_2}=\text{const}=\text{K}$$

Si la constant K és en valor absolut més gran que 2, hi ha inestabilitat, si és més petita, estabilitat.

En el cas d'una òrbita reconeguda baix l'acció de forces conservatrius, entre l'índex K de estabilitat i l'exponent característic α, hi ha la relació següent

$$\text{K}=2\cos \mathfrak{j}\alpha\text{T}$$

essent T el període. Per consegüent, d'acord amb lo anterior, per a que hi hagi estabilitat, α deu ésser imaginari pur.

Korteweg ha fet aplicacions de son anàlisi a casos molt interessants d'òrbites periòdiques descrites baix l'influencia de forces centrals, mes no podem entrar aquí en tals particularitats. Direm sols que Korteweg distingeix trajectories geomètricament inestables i aritmèticament inestables. En les primeres, les u fan progressió geomètrica, en les altres aritmètica, després de transcorre un nombre prou gran de períodes.

Molts autors s'han ocupat de la estabilitat de les solucions periòdiques del problema dels tres cossos, mes mereix ésser anomenat en primer lloc Darwin per sos treballs sobre'l problema de l'asteroide. En tals problemes els exponents característics són funcions del cocient de la massa pertorbadora a la principal del Sol.

El càlcul dels coeficients característics és, per lo general, molt complicat, lo que empetiteix bastant el valor pràctic del mètode.

Per a cets casos, l'il·lustre Levi-Civita ha ideat un modo de coneixer senzillament les condicions necessaries i suficients per a l'estabilitat, de modo que pot evitar-se el càlcul d'aquells coeficients.

Siguin les equacions linials amb coeficients periòdics

$$\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y$$

$$\frac{dx}{dt}=a_{21}x+a_{22}y$$

i admetem que es coneix una integral quadràtica amb coeficients periòdics.

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\text{Const.}$$

Si el descriminant $D = AC - B^2$ és positiu, se tracta d'una forma definida, i el criteri de Liapounow, extensió del de Lagrange, ens diu que hi haurà estabilitat.

Si $D<o$, la integral pot posar-se en la forma d'una suma de quadrats mitjançant una transformació octogonal $x=\xi\cos\delta+y\,\text{sen}\,\delta$, $y=-\xi\,\text{sen}\,\delta+y\cos\delta$, de modo que l'integral en la forma $\mu^2\xi^2-\nu^2\eta^2$ sigui reductible al producte de dos factors de primer grau, que anomenarem u i v. Les coordenades x i y s'expressen fàcilment enfunció de u i v, i les equacions diferencials en aquestes variables seràn linials i presentaràn la integral $uv=$ const.

Aquesta propietat, té per conseqüencia que les equacions diferencials es presentin en la forma

$$\frac{du}{dt}=\tau u \quad , \quad \frac{dv}{dt}=-\tau v$$

essent τ periòdica, de modo que és condició necessaria i suficient per a l'estabilitat, que

$$\int_0^t \tau dt$$

sigui finita per a tot valor de t, o lo que és igual que $\int_0^T \tau dt$ sigui nul o imaginari pur, essent T el període de τ.

El valor de τ es calcula fàcilment, i resulta

$$\tau=\frac{-j\div l\delta^2}{2\sqrt{-D}}$$

essent

$$j=a_{12}A-a_{21}C+(a_{12}-a_{11})B$$

$$l=A+C$$

$$\delta^2=\frac{(A-C)B'-(A'-C')B}{(A.C)^2-4B^2}.$$

(Tota lletra amb coma significa derivada respecte al temps.)

5. *Anàlisi de les condicions amb les que la primera aproximació és prou. Cas de coeficients constants i arrels de part real negativa no nul·la.*

Resolta la primera aproximació, el mètode d'aproximacions successives porta a la resolució de sistemes d'equacions linials no homogenies

$$\frac{dx_s^{(r)}}{dt} = p_1 x_1^{(r)} + p_2 x_2^{(2)} + \dots + p_n x_n^{(r)} + \varphi_s^{(r)}$$

en que $\varphi_s^{(K)}$ és d'ordre r en les $x_s^{(r)}$, K=1, 2 .... $r-1$, $s=1, 2 \dots n$.

En lloc d'aquestes quantitats podràn substituir-se en $\varphi_s^{(r)}$ valors donats per les aproximacions successives, amb lo que $\varphi_s^{(r)}$ resulta ésser una funció del temps. De les equacions anteriors podràn treure-se'n els valors de les $x_s^{(r)}$, afegint a la solució de les equacions sense segón membre, integrals particulars de la forma

$$x_s^{(2)} = \sum_{j=i}^{i=n} \sum_{j=i}^{j=n} x_{sj} \int_0^t \frac{\Delta ij}{\Delta} \varphi_i^{(r)} dt \qquad s=1, 2 \dots n$$

essent x_{sj} una de les integrals de x_s, de modo que

$$x_s = a_{s1} x_{s1} + a_{s2} x_{s2} + \dots + a_{sn} x_{sn}.$$

En tals valors, Δ és el determinant de totes les x_{sj} en que s i j poden variar de 1 a n, i Δ_{ij} és el menor de s_{ij} en tal determinant. Per a les constants que intervenen en les integracions de les equacions no homogenies, pot acudir-se a una hipòtesi qualsevulga, per exemple, $x_s^{(r)} = o$ per a $t = o$, $r > 1$, amb la condició de no ésser incompatible amb la convergencia.

Se tindràn així series que satisfaràn formalment a les equacions diferencials. Ara bé, si aquestes series són convergents per a tot valor de t, i si per a tot valor de t no excedeixen de cert límit, sense que per això sigui necessari que els valors inicials de les pertorbacions tinguin per límit zero al créixer t, se tindrà assegurada la estabilitat.

Essent, com fins aquí s'ha vingut suposant, les X desenrotllables en serie segons les potencies de les variables per a valors d'aquestes que no passin de cert límit, les integrals de les equacions diferencials ho seràn també segons els valors inicials, sempre que aquests no excedeixin cert límit, el qual pot ésser funció de t. La convergencia uniforme no és, en general, atribuible a les series integrals, pel que pot succeir que, al créixer el temps, per a conservar la convergencia sigui necessari donar a les constants inicials valors de més en més petits, que tinguin zero per límit. En tal cas, no hi ha estabilitat.

Liapounow, s'ha ocupat en investigar les relacions que lliguen la primera aproximació i l'estabilitat definida com s'acaba de dir, o lo que és lo mateix, en veure en quines condicions l'estabilitat és acceptable.

Mes abans d'exposar sos resultats, cal fer avinent al lector amb la terminología usada per ell.

Nombre característic d'una funció $f\ (t)$ és un número μ tal, que $e^{\mu t}f\ (t)$ té un límit finit quan t creix sense límit.

Un sistema de solucions d'equacions linials homogenies és *normal*, quan la suma s de sos nombres característics és màxima respecte a les demés solucions formades per combinació linial de les que formen sistema normal.

Sigui μ_0 el nombre característic de

$$e^{-\int \Sigma p_{ss} dt}.$$

Si $s+\mu_0=o$ el sistema de solucions s'anomena *regular*. Els sistemes linials amb coeficients constants i periòdics són sempre regulars.

Tenint present lo que s'acaba de dir, el teorema més general de Liapounow és;

Si el sistema en primera aproximació és regular i els nombres característics de les solucions són tots positius, el moviment no pertorbat és estable. Es a dir, se poden calcular series convergents que representen per a tot valor del temps les pertorbacions, les quals resulten ordenades segons les potencies dels valors inicials d'aquelles, i cada terme ve multiplicat per una funció de t que per a $t=\infty$ és zero. De modo que el moviment pertorbat és asimptòticament idèntic al no pertorbat.

Si sols són positius alguns nombres característics, mitjançant algunes condicions se logra també l'estabilitat.

Aquest teorema és sols un teorema de suficiencia.

El càlcul dels nombres característics de les solucions d'un sistema linial d'equacions presenta series dificultats, per lo que el seu estudi ha progressat sols en casos en que és relativament fàcil, com succeeix en els sistemes de coeficients constants o periòdics.

Considerem el moviment permanent. Aplicant-hi el teorema anterior resulta que, si les parts reals de les arrels de la característica són totes negatives, el moviment és segurament estable i les perturbacions asimptòticament nul·les.

Sense dificultat se demostra també per a tals moviments, que, d'existir una sola arrel amb part real positiva, hi ha inestabilitat, doncs se poden desenrotllar les pertorbacions en series de potencies de y, essent $y=x_0 e^{\lambda t}$ i debent ésser y inferior a cert límit per a que la serie tingui un valor finit, se veu clar que al fer-se $t=\infty$, x_0 deu fer-se zero.

Finalment, si les arrels són totes nul·les en sa part real, pot demostrar-se que, segons la forma de les X hi ha estabilitat o inestabilitat. Per consegüent, tractant-se de moviments permanents, *«O les arrels de la característica són totes nul·les o no. En el primer cas no's pot dir res a priori. En el segon la qüestió està resolta.*

Mes succeeix que justament el cas d'excepció és molt interessant. En les canòniques, el determinant funcional és simètric, i la característica és una equació en λ^2, de modo que, d'existir una arrel $+\lambda$, n'hi ha una altra $-\lambda$, i per lo tant, és condició indispensable que totes les λ siguin imaginaries pures. En aquestes condicions, si H és definida, hi ha estabilitat. Si no es definida, encara que totes les arrels siguin imaginaries pures, no's pot predir res, i hi ha que recorre a un anàlisi especial, que no ha pogut ésser resolt en tota sa generalitat. Liapounow acut aleshores a un altre mètode de resolució de les equacions del moviment pertorbat en el cas d'una o dues arrels de part real nul·la, reduint-ho en ambdós casos a la formació d'una funció V a la què pot aplicar-se el criteri senyalat en el capítol primer de la segona part.

Com conseqüencia de son anàlisi aplicat al cas de l'equilibri, arriba Liapounow a demostrar que, d'haver-hi en el desenrotllo de la funció potencial termes de segón ordre, i suposant que és zero el valor de la mateixa en la posició d'equilibri, quan aquests termes de segón ordre poden adquirir a la vora d'aquella valors negatius, hi ha segurament inestabilitat.

6. *Casos en què en l'equació característica figuren una o dues arrels de part real nul·la.*

Si és una sola, ha d'ésser nul·la la part imaginaria també, perquè, d'altre modo, existiría la conjugada, i ja seríen dues arrels amb part real nul·la.

Liapounow dóna per a aquest cas la regla següent quina demostració surt de l'existencia d'una certa funció V i aplicació an ella del criteri establert a la segona part. Totes les demés arrels se suposen amb part real negativa.

Redueixin-se les equacions del moviment pertorbat a la forma

$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{X}, \qquad (a)$$

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ \dots\ +p_{sn}x_n+p_s x+\mathrm{X}_s, \qquad (b)$$

i escriguin-se les equacions que resulten d'igualar els segons membres de (b) a zero. Treguin-se'n x_1, x_2 .... x_n en funcions holomorfes de x, les quals s'anularàn per a $x=o$. Substitueixin-se sos valors en X, equació (a). Si el resultat no és idènticament nul, desarrolli's segons les potencies creixents de x.

Si en tal desenrotllo la més petita potencia de x és parella, el moviment no pertorbat és inestable.

Si és senàs i el coeficient negatiu, també és inestable.

Si és senàs i el coeficient es positiu, hi ha estabilitat, i les perturbacions són asimptòticament nul·les.

Si $X=o$ idènticament, després de la substitució, existeixen una serie de moviments permanents a la qual perteneix el donat, i tots són estables. Si les pertorbacions són prou petites el moviment pertorbat s'acosta asimptòticament a un dels moviments permanents de la serie.»

Per a la reducció d'un sistema d'equacions linials a la forma (a, b) pot procedir-se com a continuació s'indica: Siguin $z_1, z_2 \ldots. z_{n+1}$ les variables dependents de t que entren en les $n+1$ equacions donades reduides a sa part linial. Les z seràn funcions de t de la forma

$$z_1=f_1(t)e^{\chi_1 t}, \quad z_2=f_2(t)e^{\chi_2 t}, \text{ etc.},$$

essent les χ polinomis

El sistema admet una integral linial

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots. + y_{n+1} z_{n+2},$$

en que les funcions y de la variable t satisfàn al sistema adjunt, de modo que així, amb el sistema de solucions adjuntes, que també és linial, se tenen $n+1$ integrals, una per a cada arrel de la característica. El determinant en χ del sistema adjunt, és igual salvant el signe de χ al del sistema donat. Sigui n_s el nombre de solucions corresponents a l'arrel $-\chi_s$, de modo que

$$n_1+n_2+\ldots.+n_k=n+1.$$

Substituint els valors de y en les integrals i agrupant els valors de les z, les integrals presentaràn la forma

$$\left(x_1^{(s)}\frac{t^{n_s}}{n_s^{1}}+\ldots.+x_{n_s}^{(s)}\right)e^{-\chi_s t}, \qquad (c)$$

essent les x funcions linials de les z.

Les n integrals així obtingudes són independents, per consegüent, las n formas x que resulten ho són també. Prenent-les com a noves funcions resulta

$$\frac{dx_1^{(s)}}{dt}=\chi_s x_1^{(s)}, \qquad (a')$$

$$\frac{dx_j^{(s)}}{dt}=\chi_s x_j^{(s)}-x_{j-1}^{(s)} \qquad \begin{matrix} s=2, 3 \ldots. n_s \\ j=1, 2 \ldots. k \end{matrix}.$$

Sigui χ_s l'arrel nula; $x_1^{(s)}$ és aleshores una integral linial del sistema de primer ordre a coeficients constants. En el nou sistema en què les variables són $x_1^{(s)}\ x_2^{(s)}\ x_3^{(s)} \ldots x_n^{(s)}$, $(s = 1, 2 \ldots k)$ les equacions diferencials propostes adoptaràn, per consegüent la forma (a) (b), en que $x_1^{(s)} = x$.

Si hi ha dues arrels imaginaries conjugades, de part real nul·la, al sistema donat pot expressar-se'l així:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y, \qquad (c)$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots\ p_{sn}x^n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s. \qquad (d)$$

En efecte, suposem que, en el procès anterior, $\chi_s = \mu + \lambda\sqrt{-1}$, $\chi_{s+1} = \mu - \lambda\sqrt{-1}$. Els valors de $x^{(s)}$, $x^{(s+1)}$ seràn imaginaris.

Siguin

$$u_j \pm iv_j \qquad j = 1, 2 \ldots n_s$$

sos valors. En lloc de $x_j^{(s)}$ i $x_j^{(s+1)}$ podràn pendre's u_j i v_j que són funcions linials de les $x_j^{(s)}$ a coeficients reals. Separant en les equacions diferencials las parts reals de les imaginaries, se té

$$\frac{du_1}{dt} = \mu u_1 - \lambda v_1 \qquad \frac{dv_1}{dt} = \mu v_1 + \lambda u_1,$$

$$\frac{du_j}{dt} = \mu u_j - \lambda v_j - u_{j-1} \quad , \quad \frac{vd_j}{dt} = \mu v_j + \mu u_j - v_{j-1},$$

$$j = 2, 3 \ldots u_j.$$

Aquestes equacions són de la forma (c) (d) fent-hi $u_1 = x$, $v_1 = y$, $\mu = 0$, i escribint les demés corresponents als altres valors de s o a arrels quina part real existeix i és negativa.

La transformació que permet les reduccions anteriors s'anomena de Liapounow.

Per a regoneixer l'estabilitat d'un moviment quines pertorbacions són tals que la primera aproximació dóna en la característica dues arrels imaginaries conjugades sense part real i les demés amb part real negativa, Liapounow dóna la següent regla.

«Reduides les equacions diferencials a la forma (c) (d), considerem l'equació a derivades parcials

$$(-\lambda y + X)\frac{\partial x_s}{\partial x} + (\lambda x + Y)\frac{\partial x_s}{\partial y} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s.$$

D'aquesta equació tregui-se'n x_s en funció de x i de y. Posi's $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, i desenrotllin-se les x_s segons les potencies creixents i positives de r, quins coeficients són funcions periòdiques de θ amb període 2π.

Les dues primeres equacions (c) donen

$$\frac{dr}{d\theta}=r\frac{X\cos\theta+Y\operatorname{sen}\theta}{\lambda r+Y\cos\theta-X\operatorname{sen}\theta}. \qquad (e)$$

Desenrotllant el segón membre, resulta

$$\frac{1}{\lambda}[X\cos\theta+Y\operatorname{sen}\theta]\left[1+\frac{X\operatorname{sen}\theta-Y\cos\theta}{\lambda^2}+\left(\frac{X\operatorname{sen}\theta-Y\cos\theta}{\lambda^2}\right)^2+\ldots.\right].$$

Posi's en lloc de X i Y sos desenrotllos en funció de r i x_s, i finalment, substitueixin-se aquests per sos desenrotllos anteriors. Sigui el resultat

$$R_2r^2+R_3r^3+\ldots. \qquad (f)$$

en que les R són funcions periòdiques de θ.

Sigui c una constant arbitraria, i formi's la serie

$$r=c+u_2c^2+u_3c^3+\ldots.u_kc^k,$$

tal, que al substituir-la en lloc de r en

$$\frac{dr}{d\theta}-R_2r^2+\ldots.R_kr^k,$$

el resultat de la substitució no contingui potencies de c inferiors a la K+1. Per això, se determinaràn les u convenientment.

Formin-se d'aquest modo les diverses funcions u fins a trobar-ne una no periòdica, en quin cas, no cal passar més endavant. La funció u_m trobada té que ésser senàs i de la forma

$$u_m=g\theta+v,$$

essent g constant i v funció periòdica.

Suposem $\lambda>0$.

El moviment és estable si $g>0$.

Inestable si $g>0$.

Si totes les funcions u_m són periòdiques el moviment és estable.»

Tan llarg enunciat demostra per sí sol la dificultat del anàlisi.

En conseqüencia, resulta d'aquest capítol, que quan no totes les arrels tenen la part real negativa, si no que algunes són de part real nul·la pot haver-hi estabilitat o inestabilitat.

Aquesta no és conseqüencia de la primera aproximació, de modo que aquesta pot portar, en aquests casos, a l'error.

Altra conseqüencia de lo que s'acaba de dir, és que, de no poguer aplicar el criteri a què porta la primera aproximació, o bé no hi ha criteri a priori, o és bastant complicada l'aplicació del de Liapounow, restringit a casos d'una o dues soles arrels de part real nul·les.

7. *Anàlisi de les condicions en que la primera aproximació és prou, pel cas de moviments periòdics. Cas de coeficients característics nuls o imaginaris purs.*

Poden enunciar-se proposicions semblants a les anteriors.

Si l'equació característica que dóna els multiplicadors té totes les arrels de mòdul més petit que la unitat, hi haurà estabilitat absoluta; si sols algunes, pot haver-hi estabilitat condicional. Si alguna té el mòdul més gros que la unitat, no hi ha estabilitat absoluta.

Quan una de les arrels té el mòdul igual a la unitat, mitjançant una substitució linial de coeficients periòdics poden reduir-se les equacions donades a la forma

$$\frac{dx}{dt}=X$$

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ \dots\ +p_{sn}x_n+p_s x+X_s.$$

Amb tal forma admeten solucions:

$$x=c+u^{(2)}c^2+u^{(3)}c^3+-$$

$$x_s=u_s^{(1)}c+u_s^{(2)}c^2+$$

amb les condicions, sempre possibles d'ésser $u_s^{(1)}$ funcions periòdiques de t; les $u_s^{(2)}$ també si $u^{(2)}$ ho és, i en general les $u_s^{(j)}$ si ho és $u^{(j)}$ i tots sos inferiors en j.

Sigui $u^{(m)}$ la primera funció no periòdica.

Si m és parella, el moviment analitzat és inestable.

Si m és senàs, s'examina el valor de g en

$$u^{(m)}=gt+v.$$

Si $g>o$ hi ha inestabilitat.

Si $g<o$ hi ha estabilitat.

Si totes les $u^{(m)}$ són periòdiques, existirà una serie de moviments periòdics comprenent al considerat i tots estables.

Quan hi ha dues arrels de mòdul igual a la unitat, essent com en el cas anterior inferiors an ella tots els demés, podrà aplicar-se la regla següent:

Reduir primer les equacions donades a la forma (c) (d) amb una substitució linial de coeficients periòdics.

Formar el següent sistema d'equacions diferencials

$$(-\lambda y+\mathrm{X})\frac{dx_s}{dx}+(\lambda x+\gamma)\frac{dx_s}{dy}+\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+ \ldots\ldots p_{sn}x_n+p_s x+q_s y+\mathrm{X}_s=o.$$

D'aquestes equacions se'n treu x_s en funció de x i y. Se posarà després $x=r\cos\theta$ $y=r\operatorname{sen}\theta$. Les equacions ($c$) donen

$$\frac{d\theta}{dt}=\lambda+\frac{\mathrm{Y}\cos\theta-\mathrm{X}\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\frac{dr}{dt}=\mathrm{X}\cos\theta+\mathrm{Y}\operatorname{sen}\theta.$$

Substitueixi's en els segons membres, denserotllats segons les potencies de x_s, en lloc d'aquestes variables, sos desenrotllos en series ordenades segons les potencies de r, i quins coeficients són series finites de senos i cosenos de múltiples de θ quins coeficients són periòdics en t.

Això fet, els segons membres de les equacions últimes se presentaràn en la forma

$$\theta_1 r+\theta_2 r+ -$$

$$\mathrm{R}_2 r^2+\mathrm{R}_3 r^3+-.$$

Essent les θ i les R funcions periòdiques de θ i t.

Formi's ara l'equació a derivades parcials

$$\frac{\partial r}{\partial t}+(\lambda+\theta_1 r+\theta_2 r^2+ \ldots\ldots \theta_{k-2}r^{k-2})\frac{\partial r}{\partial\theta}\mathrm{R}_2 r^2- \ldots\ldots \mathrm{R}_k 2^k \quad , \quad k>r$$

i ensaijem la substitució

$$r=c+u_2c^2+ \ldots\ldots u^k c^k$$

determinant les u de modo que el resultat de la substitució no contingui potencies de c inferiors a la $k+1$. Les u vindràn en forma de series finites de senos i cosenos de múltiples sencers de θ, amb coeficients que seràn funcions periòdiques o seculars de t.

Siguin $e^{\pm i\lambda\omega}$ les arrels crítiques.

Si $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ és incommensurable, i tot construint les u se'n troba una u_m no periòdica, se tindrà

$$u_m = gt + v.$$

Si $g>0$, hi ha inestabilitat.

Si $g>0$, hi ha estabilitat.

Si $\frac{\lambda\omega}{\pi}$, és commensurable, la primera funció no periòdica en la serie anterior podrà ésser de forma diferenta de la considerada.

Si és d'igual forma, les conclusions són idèntiques.

Si, essent $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ incommensurable, totes les u són periòdiques, cas important, doncs, com ha demostrat Poincaré en la cèlebre Memoria sobre curves definides per equacions diferencials, se presenta precisament per a tot sistema canònic, hi ha greus dificultats per a analitzar la convergencia, fins i tot en el sistemes de segón ordre.

8. *Anàlisi de l'estabilitat pel mètode d'Hamel. Transformacions de Levi-Civita. Mètode de Cotton.*

En el mètode d'Hamel, aplicat per aquest matemàtic a l'anàlisi de l'estabilitat de la solució de l'equació diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda M(t) = 0$$

l'estabilitat ve lligada al signe de $zz'' - \frac{1}{2}z'^2 + 2\lambda M z^2$ quan se substitueix en ella una solució periòdica particular de l'equació derivada de l'anterior, solució definida mitjançant una serie de potencies de λ amb la condició d'ésser periòdica en t. El mètode sembla presentar algunes ventatges sobre'ls que tenen per base el desenrotllo en series de potencies de t per a formar integrals particulars i fins sobre'ls mètodes directes de desenrotllo segons potencies d'un paràmetre determinat, doncs no dóna lloc a termes seculars ni a termes amb petits divisors.

Coneguda la solució periòdica aludida, x resulta per una quadratura.

En el cas d'inestabilitat, por succeir que l'integral s'anuli un nombre infinit de vegades, per anular-se la part periòdica *(estabilitat a la Poisson)* o que no s'anuli més que una vegada, i encara, en certes condicions, mai. La condició per a que això succeeixi correspòn al cas de nombres característics nuls i ha sigut presentat per Hamel en la forma

$$\int_0^{2\pi} M\omega^2 dt \leq \int_0^{2\pi} \omega^2 dt$$

essent ω una funció periòdica qualsevulga. Si $\omega = 1$, se té la condició d'estabilitat ja presentada abans per Levi-Civita:

$$\int_0^{2\pi} M dt \leq 0.$$

El treball d'Hamel que porta aquest estudi conté, ademés, interessants proposicions sobre l'estabilitat en el cas

$$x'' + (M + \lambda)x = 0$$

en funció de λ, i demostra l'existencia de solucions estables separades per altres inestables i quines λ límits corresponen a solucions periòdiques i poden considerar-se com valors propis d'una equació intregal linial de nucli simètric. Hi ha per a ells un valor mínim λ_0 tal, que per a valors més petits de λ hi ha certament inestabilitat ordinaria i a la Poisson. Per aquest valor λ_0 hi ha una sola soluciò periòdica, més per altres valors propis pot haver-n'hi dos que determinen sempre solucions estables i es troben en camps de λ estables.

Per a $\lambda = \infty$ hi ha estabilitat. Si $\lambda > \lambda_0$, no pot haver-hi inestabilitat a la Poisson.

En un estudi notable sobre les equacions diferencials amb coeficients periòdics, redueix Levi-Civita l'estabilitat de les solucions de

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

en què X_i és funció periòdica, a l'estabilitat de certa transformació algèbrica

$$x_i^{(1)} = f(x_1 x_1 \dots x_m),$$

entenent per estabilitat el que, a l'iterar un nombre qualsevol de vegades la transformació no se surti d'un contorn determinat tan petit com se vulgui. Amb tals artificis, Levi-Civita ha deduit amb molta elegancia molts resultats de Liapounow. Es per demés notable l'aplicació que de tals resultats fà Levi-Civita al problema de l'asteroide, sobre lo qual no entraré.

Un altre matemàtic ha obtingut també i generalitzat els treballs de Liapounow. Cotton raona així:

Ja que

$$\frac{dx}{dt} = lx + F(t),$$

té la solució

$$x = Ae^{lt} + \int_{t_0}^{t} e^{l(t-t_0)} F(\alpha) d\alpha,$$

les equacions donades, en el cas de coeficients constants l_i, reduídes a la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = -l_i x_i + P_i(x_1 \ldots t),$$

satisfaràn a

$$x_i = A_i e^{-l_i t} + \int_{t_0}^{t} e^{-l_i(t-\alpha)} P_i(x(\alpha) \ldots \alpha) d\alpha.$$

La convergencia del procés no té dificultat, si les P per a $t > t_0$, $|x| < X$ són ben definides, continues, i admeten, respecte a les x derivades parcials continues que, per a $x_i = o$ són inferiors en valor absolut a un nombre positiu funció de les l. Resulten així, ademés, els coneguts teoremes de Bohl:

a) Si $P_i(oot) = o$, hi ha una familia de solucions asimptòtiques a zero per a $t = \infty$, amb un nombre de constants arbitraries, al menys igual al d'arrels de part real negativa en l'equació característica.

b) Si $|P_i(o,t)| < \rho(l)$ i l'equació característica no té arrels de part real nul·la o arrels nul·les, el sistema admet una familia de solucions asimptòtiques, limitades per $t = \infty$, depenent d'un nombre de constants arbitraries igual al d'arrels de l'equació característica de part real negativa, les que, ademés, són asimptòtiques unes a altres per a $t = \infty$.

Cotton fa extensius tals resultats, ja coneguts, al cas en què el coeficient de les x en primera aproximació, no són constants, sinò funcions reals continues i limitades de t, i les P, ademés de les condicions anteriors, tenen derivades segones limitades, essent $P(o,ot)$ i $\left(\frac{dP}{dx_i}\right)_{o,i} = o$, i el sistema regular en primera aproximació. El sistema donat admet, aleshores, solucions asimptòtiques a zero per a $t = \infty$, depenent d'un nombre de constants arbitraries igual al de solucions del sistema homogeni linial de primera aproximació quin nombre carıterístic és positiu.

Mes, en general, hi ha grans dificultats per a trobar els nombres característics, menys en els casos de coeficients constants o periòdics, per lo que aquestes generalitzacions tenen més aviat valor teòric que pràctic.

Valor teòric sí el tenen considerable, perquè donen evidencia de què existeixen solucions asimptòtiques a zero com conseqüencia d'haver-hi solucions en el sistema homogeni de primera aproximació, en què totes les funcions són del tipu $(e^t)^{-m}$, essent $m>0$. I segurament deu haver-hi solucions asimptòtiques corresponents a altres funcions monotones de t.

Cotton demostra com efectivament pot arribar-s'hi en un cas particular, i arriba al resultat següent: Quan hi ha coeficients constants i P_i no depèn directament de t, si l'equació característica té una arrel nul·la, essent les parts reals de les demés diferents de zero, si's fà una transformació de Liapounow i no se'n conserven després més que els primers termes, s'arriba a un sistema reduit format per

$$\frac{dx}{dt}=gx^s,$$

i un sistema linial de coeficients constants amb $n-1$ equacions i $n-1$ incògnites. Sigui v el nombre d'arrels de la característica d'aquest sistema linial quina part real és negativa. Si s és parella, o si, essent s senàs, g és negativa, el sistema donat admet una familia de solucions asimptòtiques a zero per $t=\infty$ i depenent de $v+1$ constants arbitraries.

IV. Estabilitats d'Hill i Poisson

Teorema de Poincaré. Cas de canòniques quina resolució és reductible a quadratures. Moviments de Staude. Estabilitat del sistema planetari. Mètodes de Lindstedt i Bohlin. Aplicació a la turbina de Laval.

L'estabilitat té dintre de l'Astronomía, ademés del caràcter ja esmentat, altres aplicables a les òrbites i que ha sigut objecte d'estudis molt detinguts, en especial en lo que se refereix al problema de l'asteroide. Els nous criteris s'anomenen d'Hill i de Poisson.

En el criteri d'Hill és estable un sistema d'astres sotsmesos a ses accions mutues quan pot fixar-se una superficie que els envolti, finita, i tal que per cap valor del temps puguin atravessar-la. En el segòn criteri, s'anomena estable l'òrbita d'un astre quan aquest pot, en la seva carrera, venir a passar proper d'un punt pel què ha passat ja, encara que, en l'interval, se'n allunyi més o menys.

La primera estabilitat fou objecte d'hermosos treballs d'Hill, Bohlin i Darwin entre altres, en especial en el problema de l'asteroide, i partint de l'integral de forces vives o integral de Jacobi en el moviment relatiu.

La circumstancia de no poguer ésser negativa la força viva, fà que certa funció V sigui més petita que la constant h d'Hill. La superficie $V=h$ limita certa regió i pot en certs casos ésser un excel·lent medi de regoneixe l'estabilitat. En el problema plá de l'asteroide, quin moviment se refereix a axes mòvils que tomben uniformement a l'entorn del c. d. g. de les masses principals, Darwin ha demostrat que si la constant d'Hill és més grossa que 3,0476, en el supòsit d'ésser Júpiter l'únic planeta pertorbador, l'asteroide no pot surtir d'una certa curva tancada, anomenada d'Hill. Si a és la distancia al Sol, entre $a=4{,}24$ i $a=5$ hi ha tota una zona d'estabilitat. Y succeeix que tots els asteroides estàn dintre d'ella.

Si sols es té en compte Mars, es troba un límit interior la curva d'Hill; pels valors de la constant que solen tenir els asteroides, es un òval que encercla el Sol, altre que conté Mars i un tercer quasi circular que dista del Sol més que Mars i forma el límit interior de la zona d'asteroides.

Segons Poincaré, que ha estudiat l'estabilitat de Poisson en els sistemes diferencials pels que

$$\int dx_1 dx_2 \ldots\ldots dx_n$$

és un invariant, com succeeix en els canònics, prenent una regió R de l'espai, hi ha trajectories que l'atravessen infinites vegades, i la probabilitat de què les condicions inicials corresponguin a una trajectoria estable de Poisson és infinitament més grossa que la de que corresponguin a una inestable. En el problema dels tres cossos, l'estabilitat de Poisson i la d'Hill estàn estretament lligades.

Es sabut que les canòniques, si H satisfà determinades condicions, són solubles per quadratures de la forma:

$$\frac{dq}{(q-a)^r\,(q-b)^s\,\varphi(q)}\,dt$$

essent φ una funció que no s'anula entre a i b.

Segons siguin els exponents r i s més grossos o més petits que l'unitat, hi ha llibració o limitació en les q. Considerant el primer cas, la coordenada q pot expressar-se en forma de n funcions periòdiques de $nt+A_s$, essent A_s constants d'integració.

Els valors d'aquestes constants són tals, que al donals-hi certs increments les q no varíen, per lo que poden venir en forma de series generalitzades de Fourier.

En general, no són funcions periòdiques del temps, i les trajectories presenten estabilitat a la Poisson, es a dir, hi ha infinits valors de t, pels que la curva s'acosta tant com se vulgui a una posició inicial determinada, és a dir, la trajectoria omplena densament el camp de coordenades.

Per a que hi hagi periodicitat en t, és necessari que els períodes de què s'ha parlat abans compleixin determinades condicions. Se troben, aleshores, els moviments de Staude.

Per lo que fà referencia al sistema planetari, l'estabilitat se pren de vegades en altre sentit. Es pregunta la condició per a que un dels planetes no s'allunyi indefinidament del Sol. L'existencia de termes seculars, si no fos deguda al procediment de càlcul seguit en els desenrotllos, destruiría l'estabilitat, i en aquest sentit s'enuncia el clàssic teorema de Laplace-Lagrange, segons el què en el problema planetari dels tres cossos el semi-axe major de la cònica osculatriu no té pertorbacions seculars dintre del primer ordre en les masses, teorema que Poisson cregué poguer extendre al segón ordre.

El teorema de Laplace-Lagrange enuncia sols una estabilitat condicional, no una estabilitat absoluta que sols podría deduir-se.

1.$^{\text{er}}$ Si estessim en possessió de fórmules per a representar les coordenades dels tres cossos, fórmules que valguessin per a tot valor del temps.

2.$^{\text{on}}$ Si tals series donguessin valors inferiors a certs límits per a tot valor del temps.

Mes, fins ara, això no ha passat d'ésser un desitg.

A dos principals poden reduir-se els mètodes empleats en la Mecànica del cel per a obtenir els valors de les coordenades, cap dels quals és aplicable per $t = \infty$.

Un és el mètode clàssic de la variació de constants, que consisteix en modificar les constants que defineixen el moviment Keplerià, suposant-les funcions del temps definides per les equacions variades en forma de series segons potencies de les masses. Té aquest mètode l'inconvenient d'introduir termes seculars i petits divisors en les integracions. Es inútil per a definir l'estabilitat; les series valen sols per a petits valors de t.

Tampoc són útils els mètodes nous que han procurat evitar els termes seculars i petits divisors, perquè: 1.$^{\text{er}}$, les series no són convergents, i 2.$^{\text{on}}$, ni prenentne la part útil pot assegurar-se que aquesta és acceptable per a tot valor de t.

Els mètodes nous se redueixen a introduir en les equacions diferencials solucions en forma de series segons potencies de les masses, de forma donada, i a determinar els coeficients per lleis de recurrencia.

Les series de la Mecànica del cel, fins les formals sense caràcter pràctic, si són convergents no ho són uniformement, i el radi de convergencia en la variable o paràmetre, segons el qual es fà el desenrotllo, s'acosta a zero al creixe t sense límit. No serveixen per l'estudi de la convergencia. No obstant, presten grans serveis pràctics, no solzament a l'Astronomía, sinó fins a la Tècnica.

Precisarem una mica més la naturalesa dels mètodes aproximats de la Mecànica del cel. Siguin les equacions diferencials

$$\frac{dx_i}{dt} - X_i(x_k \mu) = 0$$

Se defineix una solució $\varphi_p(t,\mu)$ aproximada fins l'ordre p quan

$$\frac{d\varphi_i^{(p)}}{dt} - X_i\left(\varphi_k^p \mu\right)$$

és una funció desenrotllable segons potencia de $\mu^{\frac{1}{n}}$ $(n>1)$ i divisible per $\mu^{p+\frac{1}{n}}$

Aquestes solucions aproximades són les que s'adopten pràcticament per a definir les coordenades.

En el mètode clàssic de Lagrange i Laplace, les solucions tenen la forma

$$\varphi^{(p)}=\varphi_0(t)+\mu\varphi_1(t)+\ \ldots\ +\mu^p\varphi_p(t).$$

En els mètodes nous, són d'altra forma. En el de Lindstedt

$$\varphi^{(p)}=\varphi_0(t)+\mu\varphi_{p1}(t,\mu)+\ \ldots\ +\mu^p\varphi_{pp}(t,\mu).$$

En el de Bohlin

$$\varphi^p=\varphi_0(t)+\mu^{\frac{1}{2}}\varphi_{p1}\left(t,\mu^{\frac{1}{2}}\right)+\ \ldots\ \mu^p\varphi_{p,2p}\left(t,\mu^{\frac{1}{2}}\right).$$

Aquestes solucions són sols aproximacions, per lo menys en el problema dels tres cossos, admetent que la realitat correspòn a la solució efectiva del problema.

Ara bé, Poincaré ha demostrat que hi ha un nombre $a>0$ i una funció $b(\mu)$, que per $\mu=0$ té un límit finit >0 i una funció $\tau(\mu)$ que per $\mu=0$ és infinita, tals que l'erro

$$\xi_i=\varphi_i(\mu t)-\varphi_i^{(p)}(\mu,t)$$

per a $0<t<\tau(\mu)$ satisfà a

$$|\xi_i|<a(e^{b(\mu)t}-1)\mu^{p+\frac{1}{n}}.$$

Les funcions $\varphi^{(p)}$ tenen la propietat d'ésser

$$\lim_{\mu=0}\frac{\varphi_i^{(p)}-\varphi_i}{\mu^p}=0$$

és a dir, asimptòtiques a φ de l'ordre p.

El valor de ξ_i és tan més petit quan més petita és μ.

De la dependencia amb p res no pot dir-se'n, ja que a i b depenen de p. Quan p creix sense límits ξ_i no s'acosta a zero.

En general, la serie $\varphi^{(p)}$ és divergent. Sols se sab que l'aproximació és tant més bona quan més petit és μ.

Des del punt de vista del valor de ξ, els mètodes antics i moderns no presenten gaires diferencies; els moderns son més precisos amb menys treball, per no intervenir-hi, al menys en igual forma que en els antics, coeficients seculars i petits divisors.

Per lo demés, fàcil és passar de les series de Lindstedt i Bohlin a les clàssiques.

La major part d'autors moderns deriven les series de Lindstedt i Bohlin del teorema de Poincaré, que ve a ésser una extensió del de Jacobi sobre la integral complerta de l'equació a derivades parcials $H\left(x \ldots \frac{dV}{dx} -\right) = h$, i que's recordarà que pot enunciar-se dient que, si es troba una substitució $V = s^p(x, Z)$ amb n constants arbitraries Z, cap d'elles aditiva, de modo que quedi satisfeta l'equació a derivades parcials anteriors fins els termes d'ordre p inclusiu i es defineixen després x i X en funció de ζ i Z mitjançant

$$\zeta = \frac{\partial s^{(p)}}{\partial Z}, \quad X = \frac{\partial s^{(p)}}{\partial x};$$

i es posa

$$\zeta = \zeta_0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial Z}\right) t$$

les funcions x i X, satisfàn les canòniques fins a l'ordre $p' \leq p$, essent la solució asimptòtica d'ordre p'.

En aquesta proposició, la constant h se suposa funció de les Z, desenrotllada segons potencia de μ.

En el mètode de Lindstedt, $p' = p$ i en el de Bohlin $p' = p - \frac{1}{2}$.

En el mètode de Lindstedt, com en el de Bohlin, les funcions φ que figuren en els desenrotllos de $\varphi^{(p)}$ són trigonomètriques, i amb tal condició es determinen les constants disponibles en les series.

El mètode de Lindstedt no pot aplicar-se a certs casos; a la manera com δx de l'arrel $\varphi_0 + \delta x$ de

$$F_0(x) + \mu F_1(xy) - C = 0$$

en què $F(x_0) = C$, no és desenrotllable en serie segons les potencies de μ quan $\frac{dF(x_0)}{dx_0} = 0$. Mes aleshores existeix un desenrotllo segons potencies de $\sqrt{\mu}$. A aquest desenrotllo correspòn dins l'altre ordre d'idees, la serie de Bohlin.

Aquests mètodes nous han sigut aplicats amb èxit en problemes d'Engenyería, per exemple al de la turbina de Laval. Com és sabut, es tracta d'un arbre flexible amb un volant-turbina fixo al mateix i el centre de gravetat del qual no coincideix amb l'eix de l'arbre. D'aquest problema, abans d'ésser atacat pels mètodes de la Mecànica del cel, sols se'n coneixíen les solucions corresponents a moviments estacionaris sense acceleració. Behrens, amb les series de Lindstedt i Bohlin fins al segón ordre, ha pogut demostrar que, quan la velocitat no és l'anomenada crítica, el c. d. g. es mou en primera aproximació, segons una el·lipsa que tomba lentament a l'entorn del centre; en segona aproximació, el c. d. g. oscila a un i altre costat d'aquella el·lipsa mòbil.

Mes quan la velocitat és l'anomenada crítica, el moviment de l'el·lipsa és molt més ràpid i les oscil·lacions en aquest moviment més accentuades i d'altre caràcter.

APÈNDIX

I. Mètode de l'equilibri indiferent

En una memoria molt interessant de Southwell, publicada no fa gaire, s'estudia l'estabilitat en els sistemes elàstics, seguint un nou mètode, que consisteix en lo següent: Les figures elàstiques, venen separades de les inelàstiques per figures d'equilibri indiferent. L'autor se proposa la recerca d'aquestes figures. D'aqueix modo plantejat, el problema ve referit al següent: L'estat d'equilibri indiferent ve definit per l'existencia de possibles variacions en els paràmetres que defineixen la deformació, conservant-se invariables les condicions límits, de modo, que l'estat pertorbat es altre estat d'equilibri.

L'autor aplica el procediment a alguns exemples, per exemple, a una placa plana, a canons i columnes, comparant ademés els resultats teòrics amb els d'altres autors i amb la pràctica.

Estudia després l'aplicació a les planxes curves. Les fórmules que se dedueixen de la teoría tenen aplicació a resistencia de materials a l'expressar que tals o quals dimensions prevenen la inestabilitat.

II. Bibliografía

Lagrange: Mécanique analitique. — París, 1788. (Quarta edició en 1888-9.)
Minding: Mechanik. — Berlín, 1838.
Lejeune-Dirichlet: Monatsberichte. — Berlín, 1846. Journal für Mathematik, 1846.
Routh: Treatise on the stability of motion. — Londres, 1877.

Liapounow: Memorias de la societat matemàtica de Karkow. 1893. — Traduit al francès i publicat als «Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse», 1907.

Liapounow: Journal de Mathématiques. — París, 1897.

Kneser: Journal für Mathematik. 1895, 1896, 1897 i 1903.

Hadamard: Journal de Mathématiques. 1897.

Painlevé: Comptes rendus. 1897, 1904.

Hamel: Mathematische Annalen. 1903.

Bohl: Bulletin de la Société Mathématique de France. 1910 (traducció de una memoria rusa de 1900).

Bohl: Journal für Mathematik. 1904.

Cotton: Annales de l'Ecole normale supérieure. 1911.

Staude: Matematische Annalen. 1887.

Stackel: Matematische Annalen, tomo 54.

Stackel: Dissertation. — Berlín, 1885.

Bryan: Procedings of the Cambridge Phylosophical Society. 1888.

Southwell: Phylosophical Transactions. 1913.

Levi-Civita: Atti dello Instituto Veneto. 1897.

Levi-Civita: Prac matematyczno-fizycznych. — Varsovia, 1906.

Levi-Civita: Annaes de Porto. 1912.

Levi Civita: Annali di matematica. 1901.

Korteweg: Wiener Sitzungsberichte. 1886.

Beth: Transactions of the Academy of Sciences. Amsterdam

Duhem: Comptes-Rendus. 1901, 1902.

Hill: American Journal of mathematics. 1878.

Bohlin: Acta matematica. 1887.

Darwin: Acta matematica. 1897, 1899.

Bryan: Stability in Aviation. — Londres, 1911.

Busch: Stabilität, Labilität und Pendelungen in der Elektrotechnik. — Leipzig, 1913.

Hort: Technische Schwingungs lehre. — Berlín, 1910.

Reed: Treatise on the stability of ships. — Londres, 1885.

Schmidt: Stabilität von Schiffen. — Berlín, 1892.

Vegin-se, a més, els següents llibres, en els quals hi ha capítols més o menys extensos dedicats a l'estabilitat o vibracions.

Poincaré: Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. — París.

Appell: Traité de Mécanique. — París.

Routh: Treatise on advanced Dynamics. — Londres. Hi ha una traducció al alemany. — Leipzig.

Thomson (*Lord Kelvin*): Treatise on Natural Phylosophy. — Cambridge.

Whittaker: Analytical Dynamics. — Cambridge.

Love: Elasticity. — Cambridge.

Charlier: Mechanik des Himmels. — Leipzig.

Duhem: Traité d'Energétique. — París.

Goursat: Traité d'Analyse, tomo III. — París.

Lanchester: Aerodynamics. — Londres (traduit al alemany).

Klein i Sommerfeld: Theorie des Kreisels. — Leipzig.

Pollard et Dudebout: Théorie du navire. — París.

Föppl: Technische Mechanik. — Leipzig.

Bolza: Variationsrechnuing. — Leipzig.

E. TERRADAS

Institut, Barcelona.

SOBRE LA ZONA DE CONTACTE DEL TIBIDABO

L'any 1908 aparegué en la publicació *Berichten der Naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg* i. B. t. XVII, un treball amb el títol *Zona de contacte de la muntanya del Tibidabo*, que meresqué per part del Prof. Calderón una nota bibliogràfica laudatoria en el *Boletín de la Real Sociedad Española de Historia Natural*, VIII. 435. Un estudi tan important d'una regió tan accessible i pròxima a Barcelona és quasi desconegut a Catalunya, puix prescindint del brevíssim resum de la nota bibliogràfica ja esmentada i de les lleugeres referencies que fa el mateix senyor Calderón en la seva obra *Los Minerales de España* no crec que ningú més s'hagi ocupat de fer conèixer d'una manera suficient els importants descobriments mineralògics del Dr. Maier en la muntanya veïna nostra.

Devem a l'amabilitat d'aquest senyor el poder fer avui una traducció-resum de la seva «Inaugural-Dissertation», treball investigatiu minuciós i de conciencia que pot servir de model per a continuar la fructífera tasca iniciada als molts aficionats que té a Catalunya la ciencia geològica.

Comença l'autor son treball amb una ullada topogràfico-hidrogràfica de la regió